Tracer des triangles avec TikZ

Christophe AUBRY

Mai 2022

Résumé

L'objectif de ce document est de donner toutes les ressources mathématiques nécessaires afin de tracer toute sorte de triangles possibles avec TikZ. Cela implique que vous connaissiez les syntaxes LaTeX et TikZ.

Une des contraintes était de n'utiliser que TikZ. Ce qui implique que certains exemples de tracés auraient pu être plus facilement construits avec les bibliothèques `calc` et `intersections`. Cela fera l'objet d'autres articles.

Notez dès maintenant que les exemples de syntaxes TikZ ne sont pas toujours optimisés. Mais l'objectif n'était pas de « gagner » le maximum de lignes et de caractères, mais d'être le plus clair possible, en séparant bien les différents éléments des figures.

Un très grand merci à Sylvie A., professeure de mathématiques, pour les corrections et les explications détaillées apportées aux éléments mathématiques.

Table des matières

1 Définir les triangles

1.1 La définition

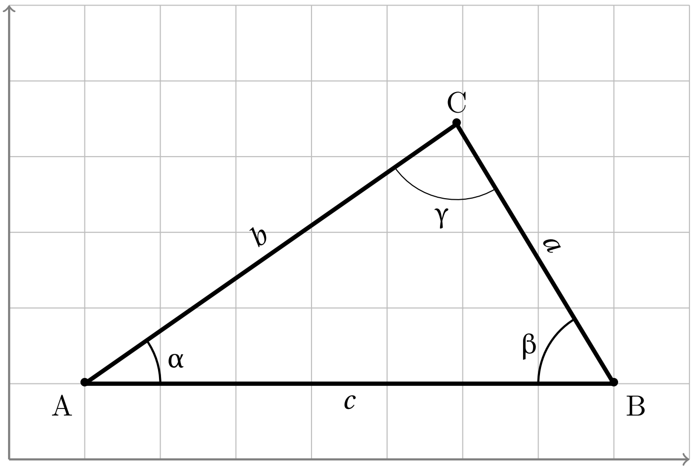
Commençons par rappeler la définition des triangles, comme elle est indiquée dans Wikipédia :

> « En géométrie euclidienne, un triangle est une figure plane formée par trois points (appelés *sommets*) et par les trois segments qui les relient (appelés *côtés*), délimitant un domaine du plan appelé *intérieur*. Lorsque les sommets sont distincts deux à deux, en chaque sommet les côtés délimitent un angle intérieur, d'où vient la dénomination de "triangle". »

1.2 Les notations

Un triangle est déterminé par les données de ses trois sommets, usuellement notés A, B et C. La longueur de chaque côté est habituellement notée par la lettre en minuscule de son sommet opposé. La longueur a est la longueur du côté opposé au sommet A, la longueur b est celle du côté opposé au sommet B et la longueur c est celle du côté opposé au sommet C.

Les angles sont usuellement notés selon leur position par rapport au sommet. Pour le sommet A, on note l'angle $\widehat{\mathrm{A}}$ ou $\widehat{\mathrm{BAC}}$ et α est l'une de ses mesures (en degrés). Ce sont les mêmes principes qui sont utilisés pour les autres angles : β, $\widehat{\mathrm{B}}$ ou $\widehat{\mathrm{ABC}}$; et γ, $\widehat{\mathrm{C}}$ ou $\widehat{\mathrm{ACB}}$



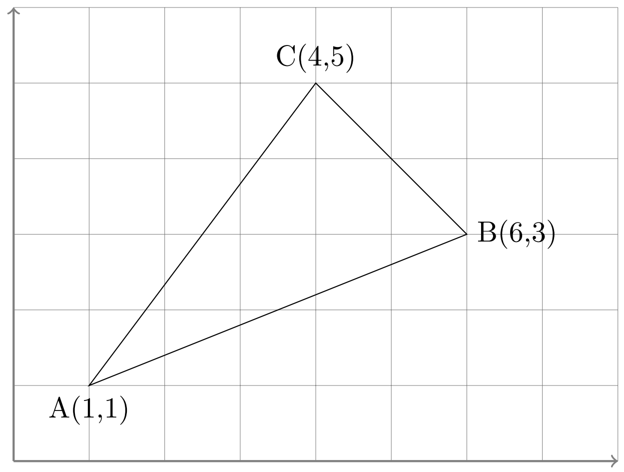
2 Tracer des triangles simples

2.1 À partir des coordonnées des sommets

Lorsque vous connaissez les coordonnées des sommets du triangle dans un repère orthonormé, il n'y a aucune difficulté à le tracer avec TikZ. Voici un exemple simple, avec les sommets A(1,1), B(6,3) et C(4,5).

Voici la syntaxe TikZ complète de cet exemple :

```
\begin{tikzpicture}
  \draw[help lines] (-1,0)grid(8,6);
  \draw (1,1)node[left]{A(1,1)}--(6,3)node[right]{B(6,3)}--
    (4,5)node[above]{C(4,5)}--cycle;
\end{tikzpicture}
```



2.2 Calculer les longueurs des côtés

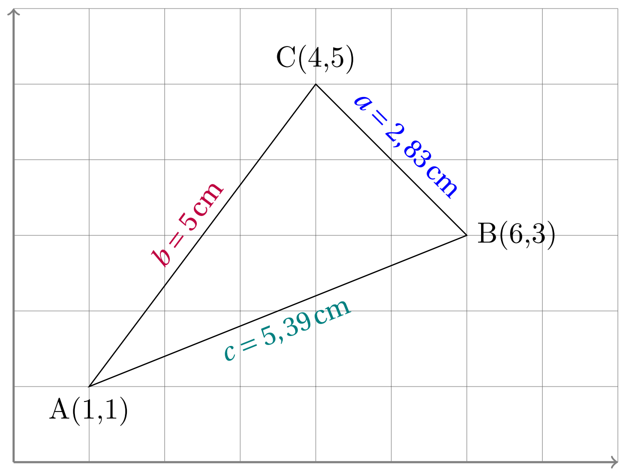
Il se peut que vous ayez besoin de connaître les longueurs de chaque côté du triangle pour enrichir le graphique. Dans un repère orthonormé, les coordonnées des points A, B et C sont notées : $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$. Pour calculer les longueurs des côtés, il faut utiliser cette formule déduite du théorème de Pythagore :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Cette même formule est transposable pour les deux autres côtés du triangle. Voici les formules et les calculs avec les coordonnées des trois sommets A(1,1), B(6,3) et C(4,5) :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ AB &= \sqrt{(6-1)^2 + (3-1)^2} \\ AB &= \sqrt{25+4} \\ AB &= \sqrt{29} \\ AB &\simeq 5,39 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} AC &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \\ AC &= \sqrt{(4-1)^2 + (5-1)^2} \\ AC &= \sqrt{9+16} \\ AC &= \sqrt{25} \\ AC &\simeq 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} BC &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} \\ BC &= \sqrt{(4-6)^2 + (5-3)^2} \\ BC &= \sqrt{4+4} \\ BC &= \sqrt{8} \\ BC &\simeq 2,83 \end{aligned}$$

Voici la figure avec les longueurs calculées :



Voici le code TikZ pour afficher cette figure :

```
\begin{tikzpicture}
  % La grille
  \draw[help lines](0,0)grid(8,6);
  \draw[thick,->,gray] (0,0)--(8,0);
  \draw[thick,->,gray] (0,0)--(0,6);
  % Le triangle
```

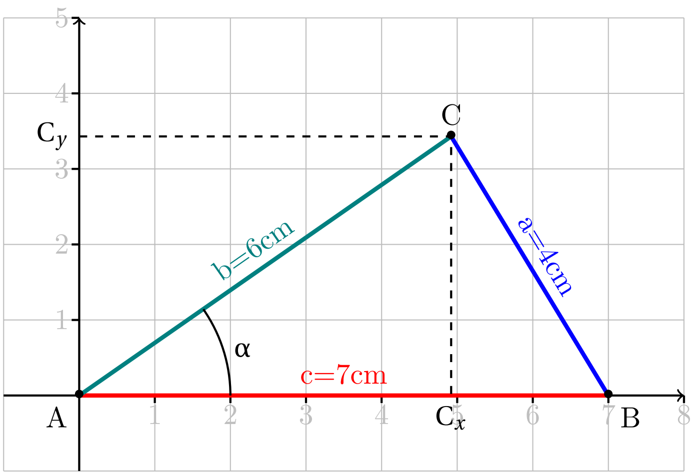
```
  \draw (1,1)node[left]{A(1,1)}--(6,3)node[right]{B(6,3)}--(4,5)node[above]{C(4,5)}--cycle;
  % Les longueurs
  \draw(1,1)--(6,3)node[below,midway,sloped]{\textcolor{teal}{$c=\cms{5,39}$}};% (AB)
  \draw(1,1)--(4,5)node[above,midway,sloped]{\textcolor{purple}{$b=\cms{5}$}};% (AC)
  \draw(4,5)--(6,3)node[above,midway,sloped]{\textcolor{blue}{$a=\cms{2,83}$}};% (BC)
\end{tikzpicture}
```

3 Tracer un triangle défini par ses longueurs

3.1 L'objectif

Nous avons un triangle avec ses trois points de sommet, A, B et C. Nous connaissons la longueur des trois côtés : la longueur a entre B et C est de 4 cm, la longueur b entre A et C est de 6 cm et la longueur c entre A et B est de 7 cm. Les points A et B sont placés sur l'axe des abscisses pour plus de facilité de calcul et le point A est placé à l'origine (0,0). De ce fait, nous connaissons les coordonnées de ces deux points A et B : A(0,0) et B(7,0).

L'objectif est de connaître les coordonnées cartésiennes du point C du triangle, avec le calcul de la valeur de α.



3.2 La méthode de calcul

3.2.1 Le théorème d'Al Kashi

Pour connaître les coordonnées cartésiennes du point C (et celles des deux autres points A et B du triangle, si elles n'étaient pas connues), il faut se baser sur le théorème d'Al Kashi (voir sur Wikipedia).

Le cosinus d'un angle est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés adjacents, moins le carré de la longueur du côté opposé ; divisé par deux fois le produit des longueurs des côtés adjacents.

$$\cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \times b \times c}$$

Pour la suite des calculs, le principe sera le même pour les deux autres angles, β en $\widehat{B}$ et γ en $\widehat{C}$:

$$\cos(\beta) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \times a \times c} \qquad \cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \times a \times b}$$

3.2.2 Le calcul de l'angle alpha

Nous connaissons les longueurs des trois côtés : $a = 4\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$ et $c = 7\,\text{cm}$. Nous pouvons donc calculer le cosinus de l'angle $\widehat{\text{CAB}}$, c'est-à-dire $\cos(\alpha)$:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \times b \times c} \\
&= \frac{6^2 + 7^2 - 4^2}{2 \times 6 \times 7} \\
&= \frac{36 + 49 - 16}{84} \\
&= \frac{69}{84} \\
&\simeq 0,82
\end{aligned}$$

Pour connaître la valeur de l'angle α à partir de son cosinus, nous pouvons utiliser une simple calculatrice préalablement programmée en degrés :

1. Saisissez la valeur du cosinus calculée : **0,82**.
2. Appuyez sur la touche $\mathbf{2^{nd}}$: la touche **cos** devient $\mathbf{cos^{-1}}$.
3. Appuyez sur la touche $\mathbf{cos^{-1}}$.
4. Vous obtenez la valeur arrondie de **34,92** degrés.

L'angle α a pour valeur 34.92°.

3.2.3 Le calcul des coordonnées du point C

Maintenant que nous connaissons la valeur de l'angle $\alpha = 34.92°$, nous pouvons calculer les coordonnées du point C :

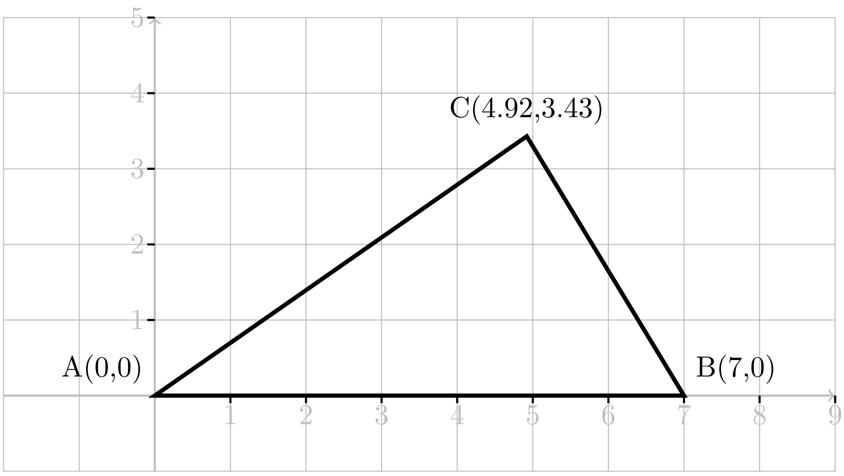
$$\begin{aligned}
x_C &= b \times \cos(\alpha) \\
&\simeq 6 \times \cos(34,92) \\
&\simeq 6 \times 0,82 \\
&\simeq 4,92
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
y_C &= b \times \sin(\alpha) \\
&\simeq 6 \times \sin(34,92) \\
&\simeq 6 \times 0,57 \\
&\simeq 3,42
\end{aligned}$$

Les coordonnées cartésiennes du point C sont donc : (4.92,3.42).

Attention, ce calcul n'est valable que si le point C possède une valeur en ordonnée positive, ce qui est initialement le cas dans cet exemple, C(4,5).

3.2.4 Le tracé du triangle

Nous avons tous les éléments nécessaires pour tracer le triangle voulu, avec les valeurs approximatives calculées précédemment. Mais la précision est suffisante pour ces exemples de graphiques simples.



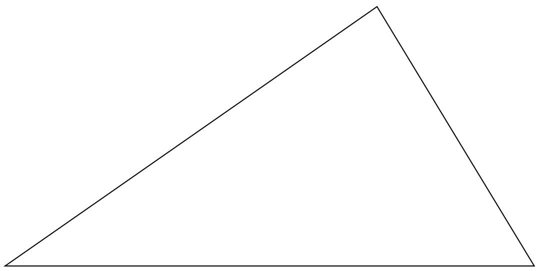
Voici la syntaxe TikZ pour tracer le triangle seul à partir des points A, B et C.

```
\begin{tikzpicture}
  \draw (0,0)--(7,0);% Segment AB
  \draw (7,0)--(4.92,3.43);% Segment BC
  \draw (0,0)--(4.92,3.43);% Segment AC
\end{tikzpicture}
```

Nous pouvons simplifier cette syntaxe en une seule ligne :

```
\begin{tikzpicture}
  \draw (0,0)--(7,0)--(4.92,3.43)--cycle;
\end{tikzpicture}
```

Voici l'affichage du triangle seul :



3.2.5 Le calcul des coordonnées du point C dans TikZ

Dans l'exemple précédent, nous avons calculé les coordonnées du point C. Mais avec TikZ, nous pouvons effectuer des calculs directement dans l'indication des coordonnées des points.

Nous savons que les coordonnées du point C sont : $x_C = b \times cos(\alpha)$ et $y_C = b \times sin(\alpha)$. Et les valeurs b et α sont connues : 6 et 34,92. Nous pouvons donc utiliser cette syntaxe TikZ :

```
\begin{tikzpicture}
  \draw (0,0)--(7,0)--(6*cos{34.92},6*sin{34.92})--cycle;
\end{tikzpicture}
```

Nous obtenons bien sûr strictement le même tracé.

3.2.6 Le calcul des angles beta et gamma

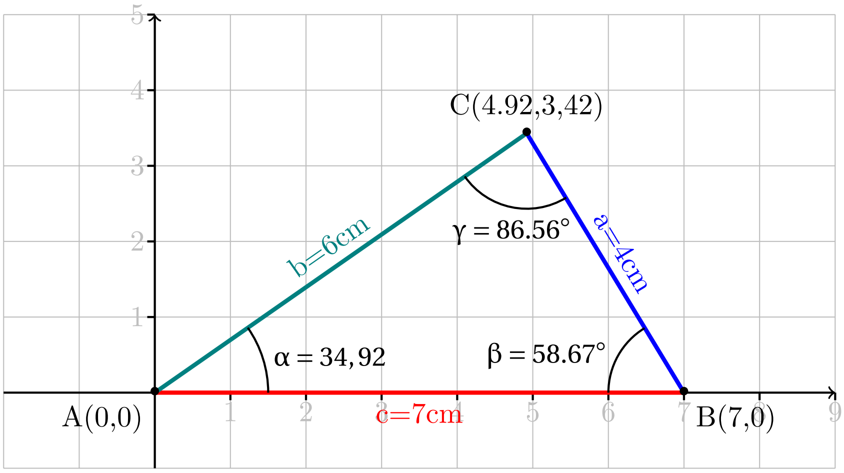
Nous pouvons maintenant calculer, si besoin est car c'est totalement facultatif pour tracer le triangle, les angles β ($\widehat{ABC}$) et γ ($\widehat{ACB}$). Voici les calculs :

$$\begin{aligned}
\cos(\beta) &= \frac{a^2+c^2-b^2}{2\times a\times c} \\
&= \frac{4^2+7^2-6^2}{2\times 4\times 7} \\
&= \frac{16+49-36}{2\times 4\times 7} \\
&= \frac{29}{56} \\
&\simeq 0,52 \\
\beta &\simeq 58.67°
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\cos(\gamma) &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2\times a\times b} \\
&= \frac{4^2+6^2-7^2}{2\times 4\times 6} \\
&= \frac{16+36-49}{2\times 4\times 6} \\
&= \frac{3}{49} \\
&\simeq 0,06 \\
\gamma &\simeq 86.56°
\end{aligned}$$

Avec les arrondis utilisés, la somme des trois angles, α,β et γ, est bien égal à 180°.

3.2.7 Le tracé complet du triangle

Voici le tracé du triangle complet, avec toutes les valeurs connues et calculées :



Voici la syntaxe TikZ pour tracer ce triangle seul :

```
\begin{tikzpicture}
  \draw (0,0)--(7,0)--(4.92,3.43)--cycle;
\end{tikzpicture}
```

Et voilà la syntaxe avec le calcul direct des coordonnées du point C, dans la syntaxe TikZ :

```
\begin{tikzpicture}
  \draw (0,0)--(7,0)--(6*cos{34.92},6*sin{34.92})--cycle;
\end{tikzpicture}
```

Et pour terminer, voici le code TikZ complet pour afficher la figure avec tous les éléments graphiques :

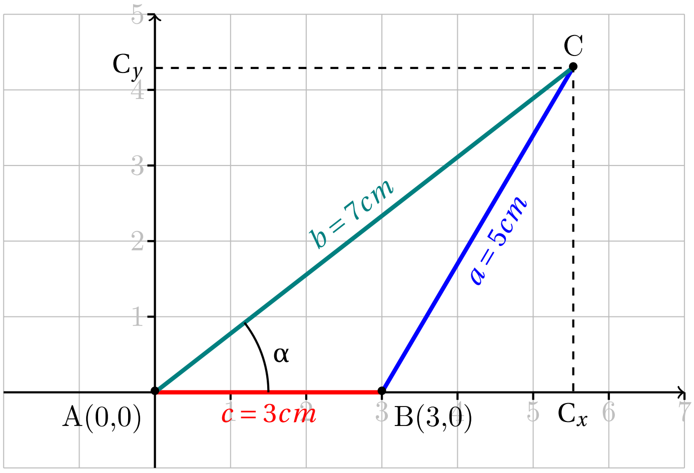
```
\begin{tikzpicture}
  % La grille et les axes
  \draw[thin,lightgray] (-2,-1) grid (9,5);
  \draw[thick,->] (-2,0)--(9,0);
  \foreach \x in {1,...,9} {
    \draw[below,lightgray](\x,0) node{\x};
    \draw[thick] (\x,0) --(\x,-0.1);
  };
  \draw[thick,->] (0,-1)--(0,5);
  \foreach \y in {1,...,5} {
    \draw[left,lightgray](0,\y) node{\y};
    \draw[thick] (-0.1,\y) --(0,\y);
  };
  % Tracé AB
  \draw[ultra thick,red] (0,0) node[black,below left]{A(0,0)}--(7,0)
        node[black,below right]{B(7,0)} node[below,midway]{c=7cm};
  % Tracé BC
  \draw[ultra thick,blue] (7,0)--(4.92,3.43) node[black,above]{C(4.92,3,42)}
        node[above,midway,sloped]{a=4cm};
  % Tracé AC
  \draw[ultra thick,teal] (0,0)--(4.92,3.43) node[above,midway,sloped]{b=6cm};
  % Les points
  \node at (0,0) {$\bullet$};% Point A
  \node at (7,0) {$\bullet$};% Point B
```

```
  \node at (4.92,3.43) {$\bullet$};% Point C
  % Angle alpha
  \draw[thick] (1.5,0) arc (0:34.91:1.5) node[midway,right]{$\alpha=34,92$};
  % Angle gamma
  \draw[thick] (4.1,2.86)arc(34.91:121.47:-1) node[below,midway]{$\gamma=\ang{86,56}$};
  % Angle beta
  \draw[thick] (6,0)arc(0:-58.56:-1) node[left,midway]{$\beta=\ang{58,67}$};
\end{tikzpicture}
```

3.3 Un deuxième exemple de triangle

Dans ce triangle, les longueurs des côtés sont définies comme suit : $a = 5\,\text{cm}$, $b = 7\,\text{cm}$ et $c = 3\,\text{cm}$. Les coordonnées sont connues pour les points A et B : A(0,0) et B(3,0).

Pour tracer le triangle ABC, nous devons calculer les coordonnées cartésiennes du point C.



Voici le calcul de l'angle α, avec la même méthode que celle utilisée dans l'exemple précédent :

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \times b \times c} \\
&= \frac{7^2 + 3^2 - 5^2}{2 \times 7 \times 3} \\
&= 0,79 \\
\alpha &\simeq 37,81
\end{aligned}$$

L'angle α a donc une valeur de 37.81°.

Voici les calculs complémentaires, utilisant les mêmes principes vus précédemment :
- Abscisse du point C, $x_C = b \times \cos(\alpha) \simeq 7 \times 0,79 \simeq 5,53$.
- Ordonnée du point C, $y_C = b \times \sin(\alpha) \simeq 7 \times 4,23 \simeq 4,29$.
- Coordonnées du point C : (5.53,4.29).

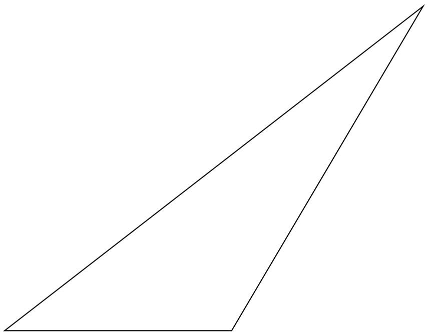
Voici la syntaxe TikZ pour tracer uniquement ce triangle :

```
\begin{tikzpicture}
  \draw (0,0)--(3,0)--(5.53,4.29)--cycle;
\end{tikzpicture}
```

Et voici la syntaxe avec le calcul des coordonnées du point C directement dans TikZ :

```
\begin{tikzpicture}
  \draw (0,0)--(3,0)--(7*cos{37.81},7*sin{37.81})--cycle;
\end{tikzpicture}
```

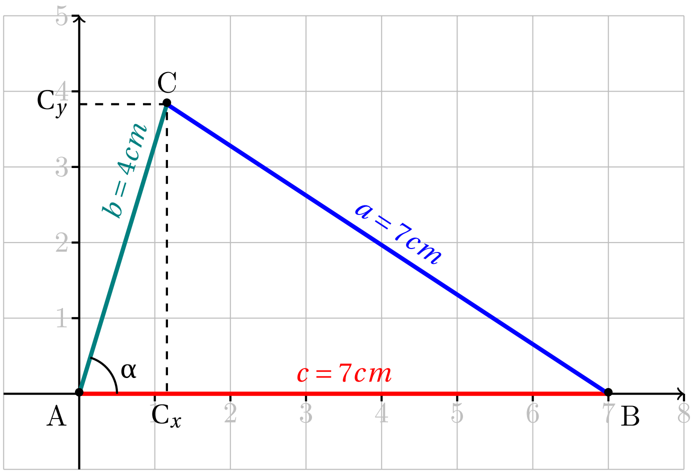
Voici l'affichage obtenu pour le tracé du triangle seul :



3.4 Un troisième exemple de triangle

Dans ce dernier exemple de triangle quelconque, les longueurs des côtés sont définies comme suit : $a = 7\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$ et $c = 7\,\text{cm}$. Les coordonnées sont connues pour les points A et B : A(0,0) et B(7,0).

Pour tracer le triangle ABC, nous devons calculer les coordonnées cartésiennes du point C.



Voici le calcul de l'angle α, en utilisant toujours la méthode de calcul issue du théorème d'Al Kashi :

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \times b \times c} \\ &= \frac{4^2 + 7^2 - 7^2}{2 \times 4 \times 7} \\ &\simeq 0,29\end{aligned}$$

L'angle α a pour valeur 73.14°.

Voici les calculs des valeurs complémentaires pour tracer le triangle :

- Abscisse du point C, $x_C = b \times \cos(\alpha) \simeq 4 \times 0,29 \simeq 1,16$.
- Ordonnée du point C, $y_C = b \times \sin(\alpha) \simeq 4 \times 0,96 \simeq 3,83$.
- Coordonnées du point C : (1.16,3.83).

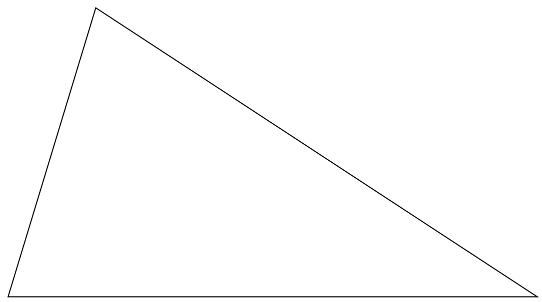
Voici la syntaxe TikZ pour tracer uniquement ce triangle :

```
\begin{tikzpicture}
  \draw (0,0)--(7,0)--(1.16,3.83)--cycle;
\end{tikzpicture}
```

Et voici la syntaxe avec le calcul des coordonnées du point C directement dans TikZ :

```
\begin{tikzpicture}
  \draw (0,0)--(7,0)--(4*cos{73.14},4*sin{73.14})--cycle;
\end{tikzpicture}
```

Voilà l'affichage obtenu pour le tracé du triangle seul :



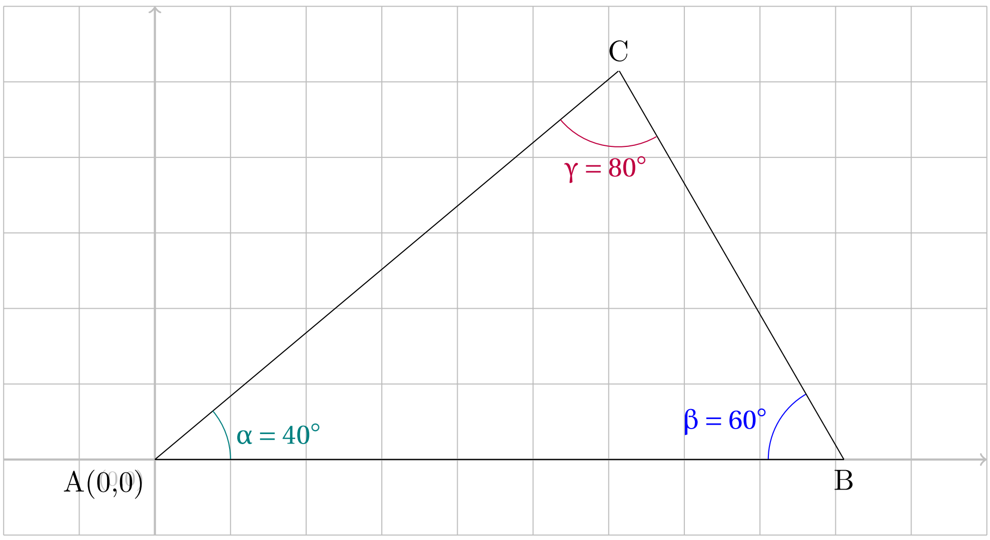
4 Tracer un triangle défini par ses angles

4.1 L'objectif

Nous souhaitons tracer un triangle sachant que nous ne connaissons que les coordonnées du point A, les angles aux trois sommets et la longueur d'un côté. Dans cet exemple, voici les paramètres connus :

- Les coordonnées du point A(0,0).
- Les angles $\alpha = 40°$, $\beta = 60°$ et $\gamma = 80°$.
- La longueur du segment $[AC]$: $b = 8$.

Voici les données connues pour tracer ce triangle :

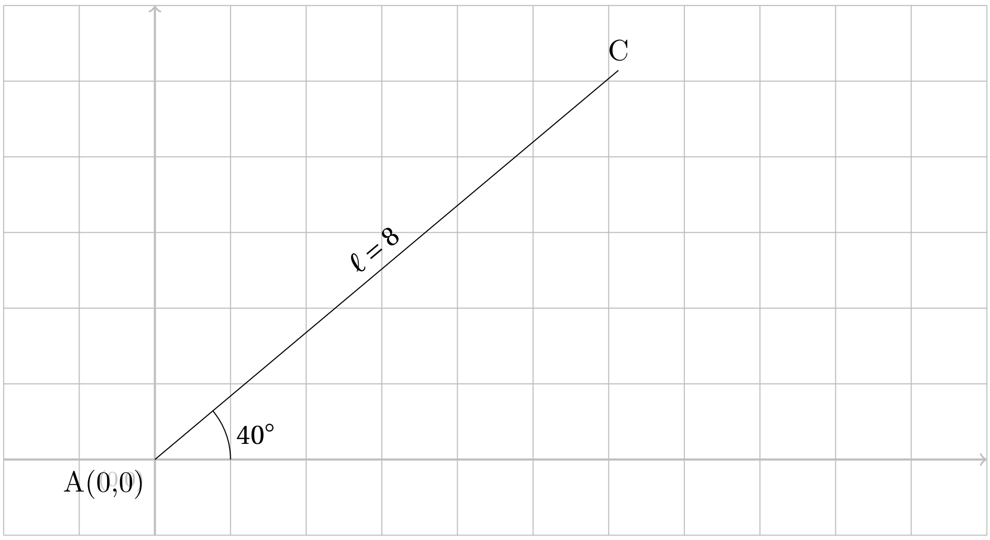


4.2 Tracer le segment AC connu

La première étape consiste à tracer le segment $[AC]$ dont nous connaissons tous les paramètres nécessaires. Avec TikZ, nous utilisons la syntaxe avec les coordonnées polaires : `\draw(0,0)--(40:8);`.

- Le point de référence est A, dont les coordonnées sont `(0,0)`.
- L'angle voulu est de $40°$.
- Et la longueur est de 8.

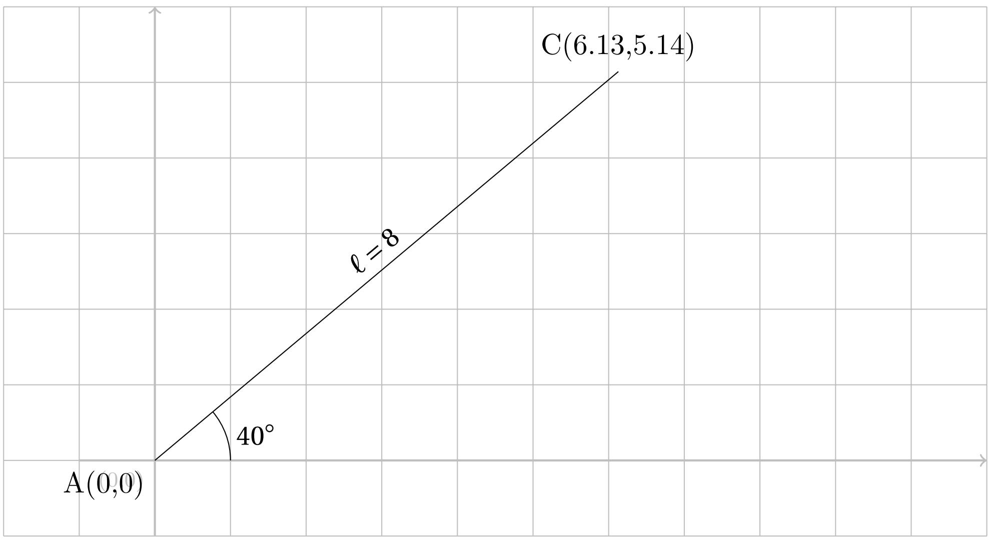
Voici le tracé du segment $[AC]$:



Il nous faut maintenant connaître les coordonnées du point C. Pour cela nous utilisons ces équations déjà vues précédemment :

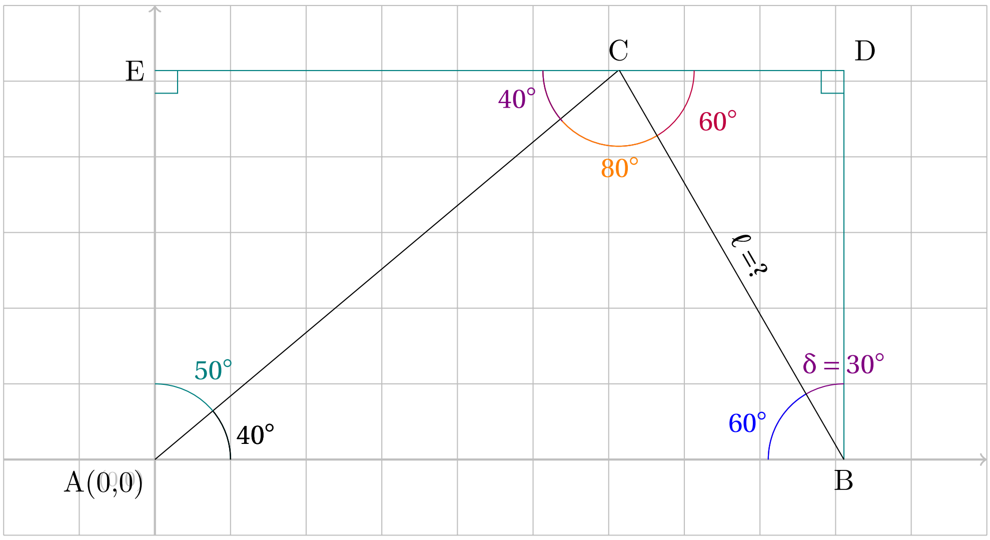
$$x_C = r \times \cos(\alpha) \qquad y_C = r \times \sin(\alpha)$$
$$x_C = 8 \times \cos(40) \qquad y_C = 8 \times \sin(40)$$
$$x_C \simeq 6,13 \qquad y_C \simeq 5,14$$

Le point C a pour coordonnées C(6.13,5.14).



4.3 Calculer la longueur du segment CB et les coordonnées de B

L'angle en C dans le triangle doit faire 80°. Avec les différents triangles rectangles de la figure, nous déduisons que l'angle en B a pour valeur : $\delta = 30°$



Nous pouvons calculer la longueur ℓ du segment [BC] avec la simple règle des cosinus dans un triangle rectangle :

$$\begin{aligned}
\cos(\delta) &= \frac{\text{Côté adjacent}}{\text{Hypothénuse}} \\
\cos(\delta) &= \frac{BD}{BC} \\
BC &= \frac{BD}{\cos(30)} \quad \text{(ici BD est égale à la valeur de l'ordonnée de C)} \\
BC &= \frac{5,14}{\cos(30)} \\
BC &\simeq 5,94
\end{aligned}$$

La longueur du segment [BC] est donc de 5,94.

Nous devons maintenant calculer les coordonnées du point B. Avec le théorème de Pythagore, nous pouvons obtenir la longueur du segment [CD] :

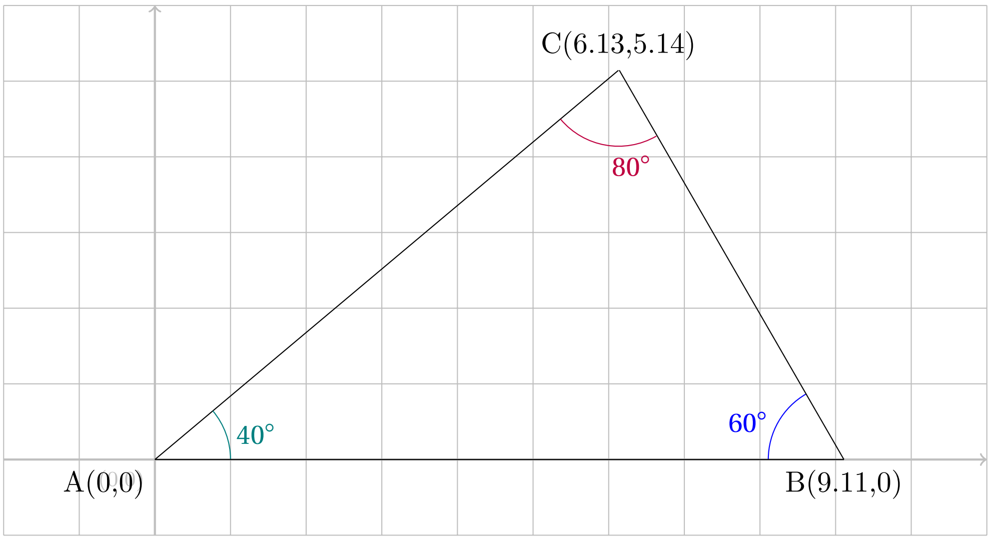
$$\begin{aligned}
BC^2 &= CD^2 + DB^2 \\
CD^2 &= BC^2 - DB^2 \\
CD^2 &\simeq 5,94^2 - 5,14^2 \\
CD &\simeq \sqrt{8,86} \\
CD &\simeq 2,98
\end{aligned}$$

Nous connaissons les longueurs des segments [EC] et [CD], nous avons ce simple calcul à résoudre :

$$\begin{aligned}
AB &= ED \\
AB &= EC + CD \\
AB &\simeq 6,13 + 2,98 \\
AB &\simeq 9,11
\end{aligned}$$

Les coordonnées de B sont B(9.11,0).

Nous connaissons maintenant toutes les données nécessaires, c'est-à-dire les coordonnées des points A, B et C, pour tracer le triangle :

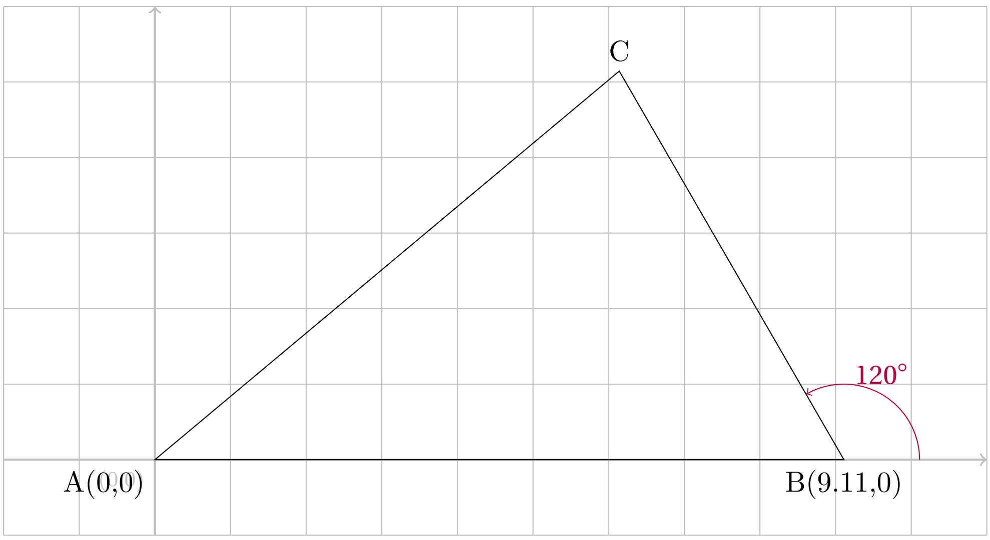


4.4 Tracer le triangle avec TikZ

Voici la syntaxe TikZ à utiliser pour tracer uniquement ce triangle :

```
\begin{tikzpicture}
  \draw(0,0)--(9.11,0)--++(120:5.94)--cycle;
\end{tikzpicture}
```

1. `(0,0)` : coordonnées du premier point, le point A du triangle.
2. `--(9.11,0)` : tracé du segment de A à B, avec les coordonnées du deuxième point, le point B du triangle.
3. `--++(120:5.94)` : tracé du segment B à C, en coordoonées polaires relative au point précédent, le point B. L'angle est bien de 120°, car nous utilisons le sens trigonométrique. Nous avons donc 180-60=120.
4. `--cycle` : nous fermons automatiquement la figure sur le point de départ, le point A.



5 Utiliser des triangles remarquables

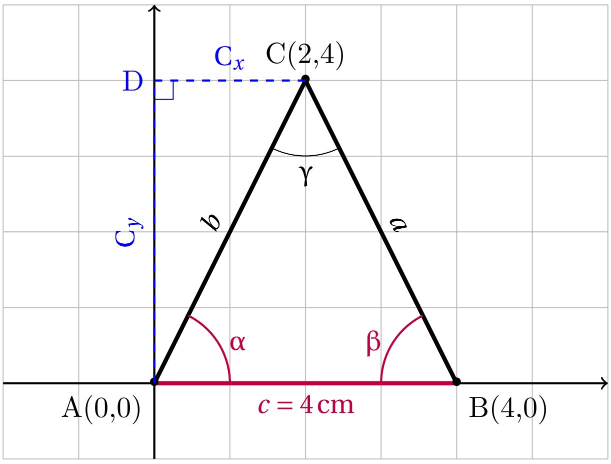
5.1 Le triangle isocèle

Voici la définition du triangle isocèle proposée par Wikipedia :

« Un triangle isocèle est un triangle ayant au moins deux côtés de même longueur. Les deux angles adjacents au troisième côté sont alors de même mesure. »

Dans cet exemple, les coordonnées cartésiennes des trois points A, B et C sont connues : A(0,0), B(4,0) et C(2,4). Donc nous pouvons parfaitement tracer le triangle sans qu'aucun calcul supplémentaire ne soit nécessaire. Mais afin de connaître tous les paramètres d'affichage, nous pouvons effectuer des calculs pour connaître les valeurs des longueurs a et b et celles des angles α, β et γ.

Pour les longueurs, seule la longueur c est connue : $c = 4\,\text{cm}$. Et par définition même des triangles isocèles, les angles α et β sont identiques.



Le triangle ADC est rectangle en D. Nous pouvons donc calculer la longueur b du segment [AC], avec le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}
AC^2 &= AD^2 + DC^2 \\
b^2 &= {y_C}^2 + {x_C}^2 \\
&= 4^2 + 2^2 \\
&= 16 + 4 \\
&= 20 \\
b &= \sqrt{20} \\
&\simeq 4,47
\end{aligned}$$

La longueur de b est donc de $4,47\,\text{cm}$. Nous avons un triangle isocèle, donc les longueurs a et b sont identiques : $b = a \simeq 4,47$. Et nous connaissons la longueur c : $c = 4\,\text{cm}$.

Avec toutes ces données maintenant connues, nous pouvons calculer l'angle α, avec le théorème d'Al Kashi :

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \times b \times c} \\
&= \frac{\cancel{b^2} + c^2 - \cancel{a^2}}{2 \times b \times c} \qquad \text{(puisque } b = a\text{)} \\
&\simeq \frac{4^2}{2 \times 4,47 \times 4} \\
&\simeq \frac{16}{35,76} \\
&\simeq 0,45 \\
\alpha &\simeq 63,26
\end{aligned}$$

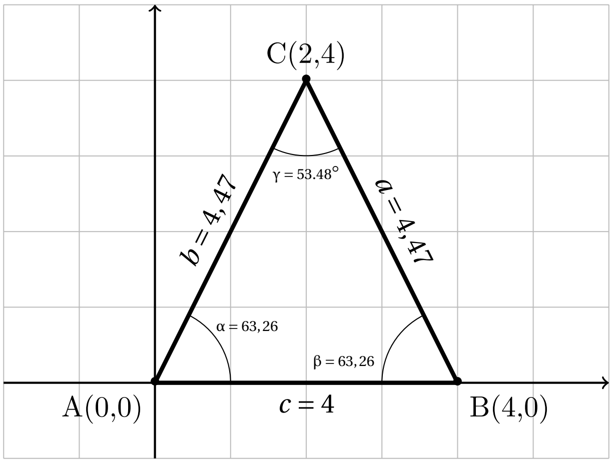
L'angle $\widehat{BAC}$ a pour mesure $\alpha \simeq 63.26°$.

Nous avons un triangle isocèle, donc par définition les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{CBA}$ sont identiques, donc : $\alpha = \beta \simeq 63.26°$.

C'est parfaitement facultatif, mais nous pouvons calculer la valeur de l'angle γ. Nous savons que la somme des mesures des angles d'un triangle fait $180°$, donc :

$$\begin{aligned} 180 &= \alpha + \beta + \gamma \\ 180 &\simeq 63,26 + 63,26 + \gamma \\ \gamma &\simeq 53.48^\circ \end{aligned}$$

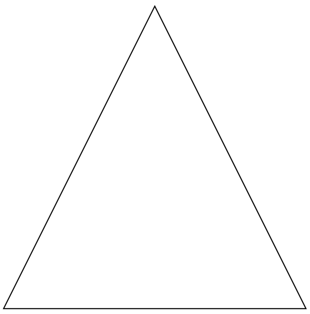
Voici le triangle complet avec toutes les valeurs connues et calculées :



Voici la syntaxe TikZ pour tracer uniquement ce triangle :

```
\begin{tikzpicture}
  \draw (0,0)--(4,0)--(2,4)--cycle;
\end{tikzpicture}
```

Voici le tracé du triangle seul :



Voici le code TikZ complet pour afficher la figure avec tous les éléments graphiques :

```
\begin{tikzpicture}
  % La grille
  \draw[thin,lightgray] (-2,-1) grid (6,5);
  \draw[thick,->] (-2,0)--(6,0);% Axe X
  \draw[thick,->] (0,-1)--(0,5);% Axe Y
  % Tracé AB, c=4cm
  \draw[ultra thick] (0,0) node[black,below left]{A(0,0)}--(4,0)
        node[black,below right]{B(4,0)} node[below,midway]{$c=4$};
  % Tracé BC, a=4cm
  \draw[ultra thick] (4,0)--(2,4) node[above,midway,sloped]{$a=4,47$};
  % Tracé AC, b=6cm
  \draw[ultra thick] (0,0)--(2,4) node[above,midway,sloped]{$b=4,47$};
  % Les points
 \node at (0,0) {$\bullet$};
```

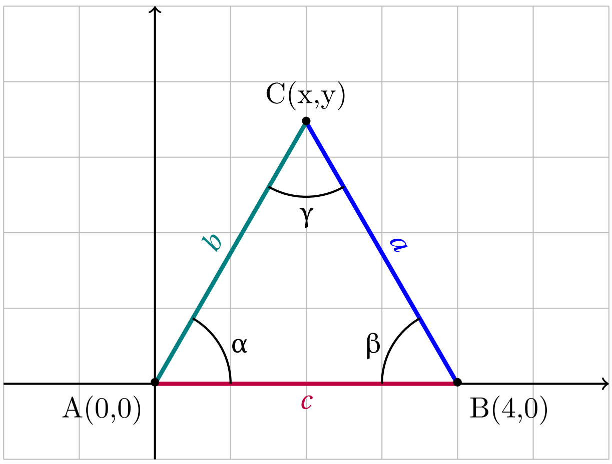
```
  \node at (4,0) {$\bullet$};
  % Point C
  \draw (2,4) node{$\bullet$} node[black,above]{C(2,4)};
  % L'angle BAC, alpha
  \draw (1,0) arc (0:63.26:1) node[near end,right]{\tiny{$\alpha=63,26$}};
  % L'angle ABC, beta
  \draw (3,0) arc (0:-63.26:-1) node[near start,left]{\tiny{$\beta=63,26$}};
  % L'angle ACB, gamma
  \draw (1.55,3.11) arc (63.26:116.74:-1) node[below,midway]{\tiny{$\gamma=\ang{53,48}$}};
\end{tikzpicture}
```

5.2 Le triangle équilatéral

Voici la définition du triangle équilatéral proposée par Wikipedia :

> « Un triangle équilatéral est un triangle dont les trois côtés ont la même longueur. Ses trois angles ont alors la même mesure qui vaut donc 60°. »

Dans cet exemple, les coordonnées des points A et B sont connues : A(0,0) et B(4,0). Les coordonnées du point C sont à calculer. Les longueurs des côtés sont connues et identiques, par définition même : $a = b = c = 4\,\text{cm}$. De même, les angles sont connus et identiques : $\alpha = \beta = \gamma = 60°$.



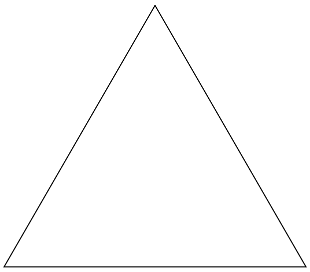
Comme les angles sont connus et identiques (60°) dans un triangle équilatéral, nous pouvons, avec TikZ, tracer le segment [AB] en coordonnées cartésiennes et les segments [BC] et [AC], avec les coordonnées polaires relatives au point C. Voici la syntaxe TikZ à utiliser pour tracer uniquement ce triangle :

```
\begin{tikzpicture}
  \draw (0,0)--(4,0); % Segment AB
  \draw (4,0)--+(120:4); % Segment BC
  \draw (0,0)--+(60:4); % Segment AC
\end{tikzpicture}
```

Nous pouvons bien sûr simplifier la syntaxe TikZ en une seule ligne :

```
\begin{tikzpicture}
  \draw (0,0)--(4,0)--+(120:4)--cycle;
\end{tikzpicture}
```

Voici l'affichage du triangle seul :



Le calcul des coordonnées du point C est parfaitement facultatif, mais il peut être utile pour enrichir le graphique. Voici les calculs des coordonnées du point C :

$$\begin{aligned} x_C &= r \times \cos(\alpha) \\ &= 4 \times \cos(60) \\ &= 4 \times 0,5 \\ &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_C &= r \times \sin(\alpha) \\ &= 4 \times \sin(60) \\ &\simeq 4 \times 0,87 \\ &\simeq 3,48 \end{aligned}$$

Les coordonnées cartésiennes du point C sont : C(2,3.48).

5.3 Le triangle rectangle

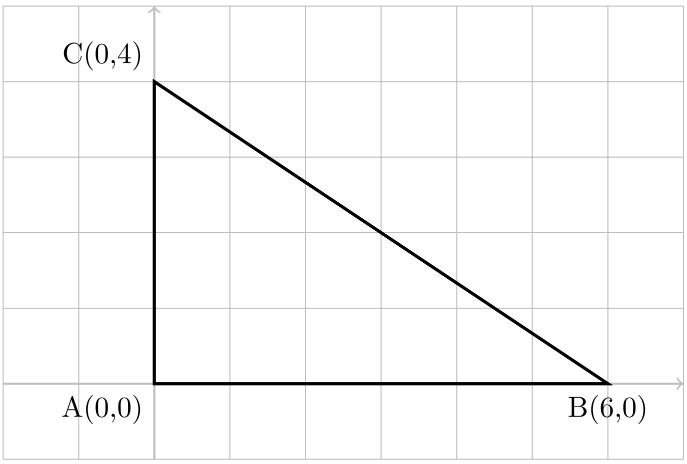
Voici la définition du triangle rectangle proposée par Wikipedia :

> « Un triangle rectangle est un triangle ayant un angle droit, c'est-à-dire de mesure 90°. »

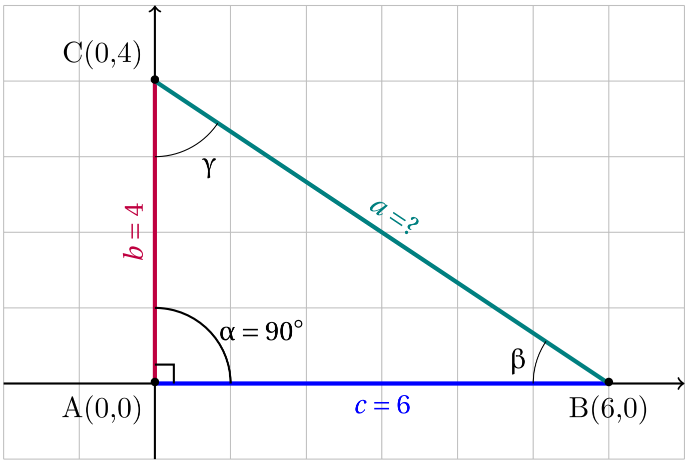
Dans cet exemple, les longueurs b et c sont connues : $b = 4$ et $c = 6$. Les coordonnées des trois points du triangle sont connues : A(0,0), B(6,0) et C(0,4). Le triangle ABC est rectangle en A.

Voici la syntaxe TikZ pour tracer uniquement ce triangle, dont nous connaissions dès le départ les coordonnées des trois sommets :

```
\begin{tikzpicture}
  \draw (0,0)--(6,0)--(0,4)--cycle;
\end{tikzpicture}
```



À nouveau, il peut être utile de connaître les valeurs de la longueur a et celles des angles β et γ, pour enrichir le graphique.



Avec le théorème de Pythagore, nous pouvons calculer la longueur a :

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \\ &= 4^2 + 6^2 \\ &= 16 + 36 \\ &= 52 \\ a &= \sqrt{52} \\ &\simeq 7,21 \end{aligned}$$

Pour calculer les angles β et γ, nous pouvons utiliser la trigonométrie dans le triangle rectangle :

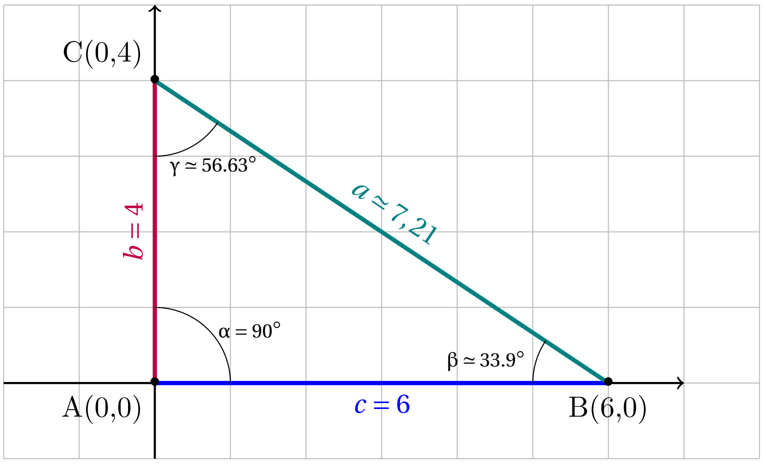
$$\cos(\text{angle}) = \frac{\text{Côté adjacent}}{\text{Hypothénuse}}$$

.

Et nous connaissons bien toutes les longueurs des côtés du triangle : $a = 7,21$, $b = 4$ et $c = 6$.
Pour les angles β et γ, nous avons donc :

$$\begin{aligned} cos(\beta) &= \frac{c}{a} \\ cos(\beta) &= \frac{6}{7,21} \\ cos(\beta) &\simeq 0,83 \\ \beta &\simeq 33,9 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} cos(\gamma) &= \frac{b}{a} \\ cos(\gamma) &= \frac{4}{7,21} \\ cos(\gamma) &\simeq 0,55 \\ \gamma &\simeq 56,63 \end{aligned}$$

Nous connaissons maintenant les trois dernières valeurs utiles pour enrichir le graphique : $a \simeq 7,21\,\text{cm}$, $\beta \simeq 33.9°$ et $\gamma \simeq 56.63°$.
Voici la figure complète :



Et voici le code complet TikZ pour afficher cette figure :

```
\begin{tikzpicture}
  % La grille et les axes
  \draw[thin,lightgray] (-2,-1) grid (8,5);
  \draw[thick,->] (-2,0)--(7,0);% Axe X
  \draw[thick,->] (0,-1)--(0,5);% Axe Y
  % Tracé AB
  \draw[ultra thick,blue] (0,0) node[black,below left]{A(0,0)}--(6,0)
        node[black,below]{B(6,0)} node[below,midway]{$c=6$};
  % Tracé AC
  \draw[ultra thick,purple] (0,0)--(0,4) node[above,midway,sloped]{$b=4$};
  % Tracé BC
  \draw[ultra thick,teal] (6,0)--(0,4) node[black,above left]{C(0,4)}
        node[above,midway,sloped]{$a=7,21$};
  % Les points
  \node at (0,0) {$\bullet$};% Point A
  \node at (6,0) {$\bullet$};% Point B
  \node at (0,4) {$\bullet$};% Point C
  % L'angle BAC, alpha
  \draw (1,0) arc (0:90:1) node[midway,right]{{\scriptsize $\alpha=\ang{90}$}};
  % L'angle ABC, beta
  \draw (5,0) arc (0:-33.9:-1) node[midway,left]{{\scriptsize $\beta=\ang{33.9}$}};
  % L'angle ACB, gamma
  \draw (0,3) arc (90:146.1:-1) node[below ,midway]{{\scriptsize $\gamma=\ang{56.63}$}};
\end{tikzpicture}
```

6 Tracer des figures avec les triangles

6.1 Calculer les coordonnées du centre de gravité d'un triangle

6.1.1 Les données initiales

Voici la définition du centre de gravité d'un triangle donné par Wikipédia :

> « Dans un triangle, une médiane est un segment qui relie un sommet au milieu du côté opposé. Chaque médiane divise un triangle en deux triangles d'aires égales.
> Si le triangle est non plat, les trois médianes sont concourantes en un point appelé centre de gravité. »

Le centre de gravité d'un triangle est donc le point d'intersection des trois médianes. Sachant que dans un triangle, une médiane est un segment qui joint un sommet au milieu du côté opposé.

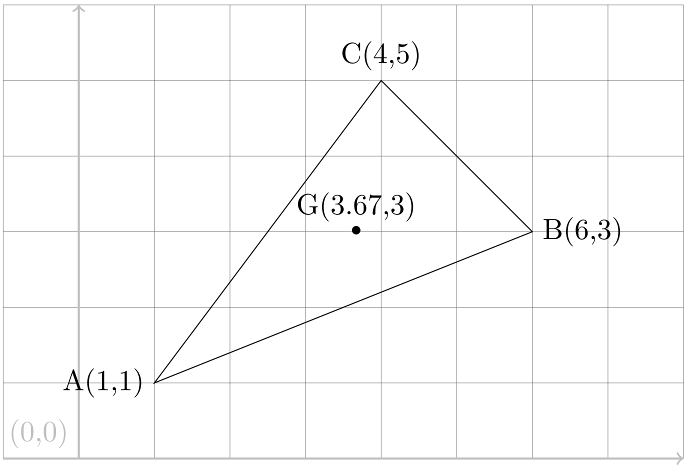
Pour connaître les coordonnées du centre de gravité d'un triangle, usuellement noté G(x,y), il suffit de connaître les coordonnées des trois sommets du triangle, A(x,y), B(x,y) et C(x,y). Dans cet exemple, les coordonnées sont A(1,1), B(6,3) et C(4,5).

Voici le calcul pour connaître les coordonnées de G :

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ &= \frac{1+6+4}{3} \\ &= \frac{11}{3} \\ &\simeq 3,67 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} y_G &= \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ &= \frac{1+3+5}{3} \\ &= \frac{9}{3} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Les coordonnées du point G sont : G(3.67,3).

Voici le tracé du triangle avec son centre de gravité :



6.1.2 Tracer les médianes

Pour tracer les médianes, nous devons connaître les coordonnées du milieu de chaque segment. Par exemple, pour le segment [AB], le milieu est noté $\mathrm{M_C}$. Nous pouvons utiliser cette formule simple :

$$\mathrm{M_C}(x,y) = \left(\frac{x_\mathrm{A}+x_\mathrm{B}}{2}, \frac{y_\mathrm{A}+y_\mathrm{B}}{2}\right)$$

Le principe est le même pour les deux autres segments. Le milieu du segment [AC] est noté $\mathrm{M_B}$ et celui de [BC] est noté $\mathrm{M_A}$.

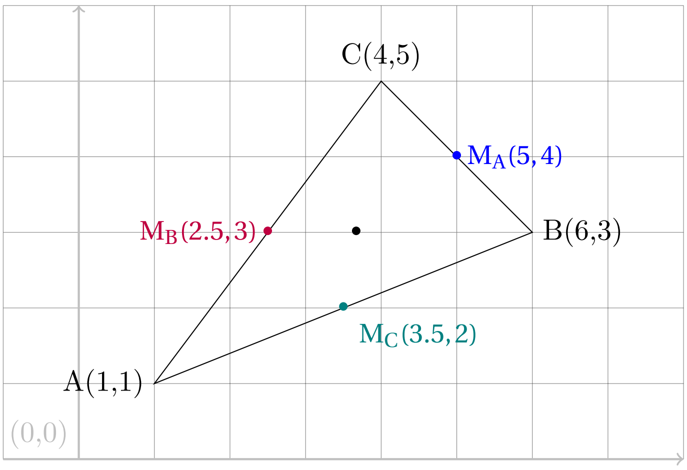
Voici les calculs des coordonnées des trois milieux des trois segments :

$$\mathrm{M_A} = \left(\frac{x_\mathrm{B}+x_\mathrm{C}}{2}, \frac{y_\mathrm{B}+y_\mathrm{C}}{2}\right) \qquad \mathrm{M_B} = \left(\frac{x_\mathrm{A}+x_\mathrm{C}}{2}, \frac{y_\mathrm{A}+y_\mathrm{C}}{2}\right) \qquad \mathrm{M_C} = \left(\frac{x_\mathrm{A}+x_\mathrm{B}}{2}, \frac{y_\mathrm{A}+y_\mathrm{B}}{2}\right)$$

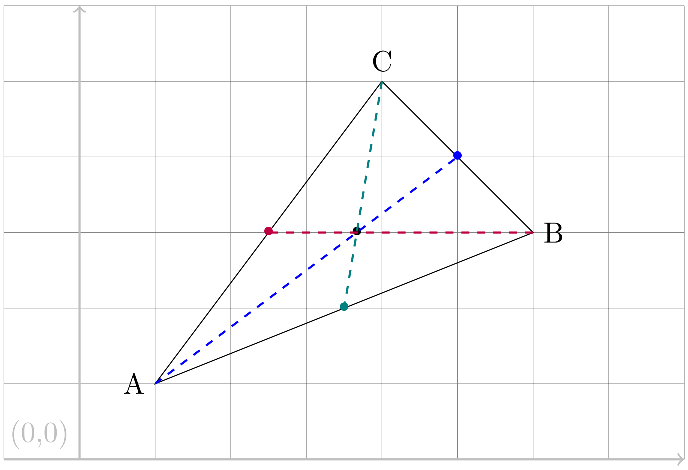
$$\mathrm{M_A} = \left(\frac{6+4}{2}, \frac{3+5}{2}\right) \qquad \mathrm{M_B} = \left(\frac{1+4}{2}, \frac{1+5}{2}\right) \qquad \mathrm{M_C} = \left(\frac{1+6}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$$

$$\mathrm{M_A} = (5,4) \qquad \mathrm{M_B} = (2.5,3) \qquad \mathrm{M_C} = (3.5,2)$$

Et voici les trois milieux placés sur la figure du triangle :



Nous pouvons maintenant tracer les médianes : ce sont les segments qui vont de chaque sommet au milieu de chaque segment opposé.

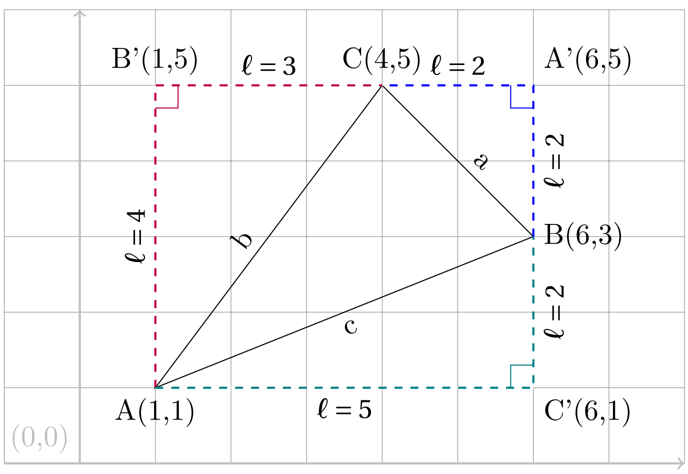


Voici le code TikZ pour afficher cette figure complète :

```
\begin{tikzpicture}
  % La grille et les axes
  \draw[help lines] (-1,0) grid (8,6);
  \draw[thick,lightgray,->] (-1,0)--(8,0);% Axe X
  \draw[thick,lightgray,->] (0,0)--(0,6);% Axe Y
  \node[lightgray,above left] at (0,0) {(0,0)};% Origine
  % Le triangle
  \draw (1,1)node[left]{A}--(6,3)node[right]{B}--(4,5)node[above]{C}--cycle;
  \draw (3.67,3)node{$\bullet$};% Le point central
  % Les points milieu
  \draw[purple] (2.5,3) node{$\bullet$};% Segment b
  \draw[teal] (3.5,2) node{$\bullet$};% Segment c
  \draw[blue] (5,4) node{$\bullet$};% Segment a
  % Les médianes
  \draw[thick,dashed,blue] (1,1)--(5,4);% segment a
  \draw[thick,dashed,purple] (6,3)--(2.5,3);% segment b
  \draw[thick,dashed,teal] (4,5)--(3.5,2);% segment c
\end{tikzpicture}
```

6.1.3 Calculer les longueurs des segments

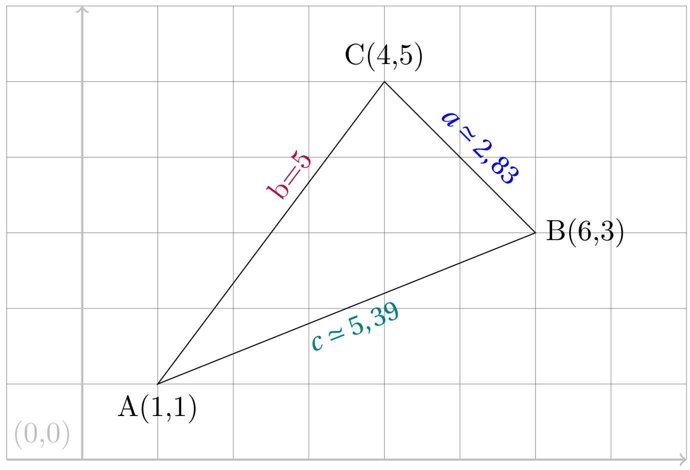
Nous pouvons en plus, si vous le souhaitez, calculer les longueurs des trois côtés du triangle. Chaque côté faisant un triangle rectangle avec ses deux sommets, nous pouvons utiliser le théorème de Pythagore.



Voici les calculs des longueurs des côtés a, b et c :

$$a^2 = 2^2 + 2^2 \qquad b^2 = 3^2 + 4^2 \qquad c^2 = 5^2 + 2^2$$
$$a^2 = 8 \qquad b^2 = 25 \qquad c^2 = 29$$
$$a = \sqrt{8} \qquad b = \sqrt{25} \qquad c = \sqrt{29}$$
$$a \simeq 2,83 \qquad b = 5 \qquad c \simeq 5,39$$

Voici les longueurs affichées sur le triangle :

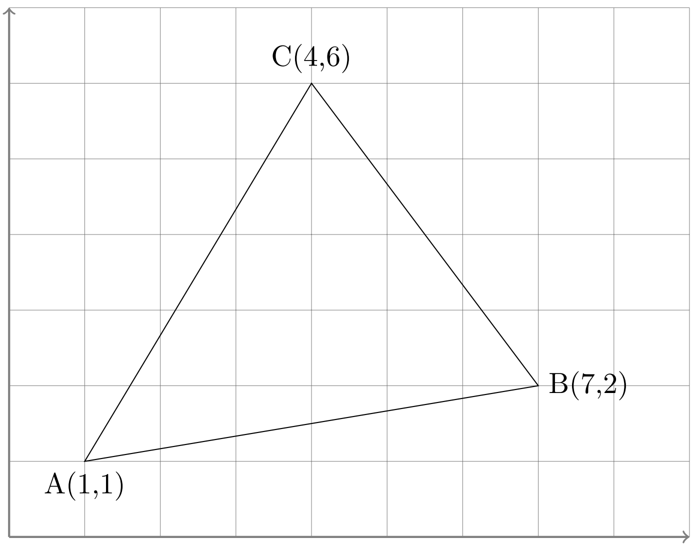


6.2 Construire l'othocentre d'un triangle

Voici la définition de l'orthocentre donné par Wikipédia :

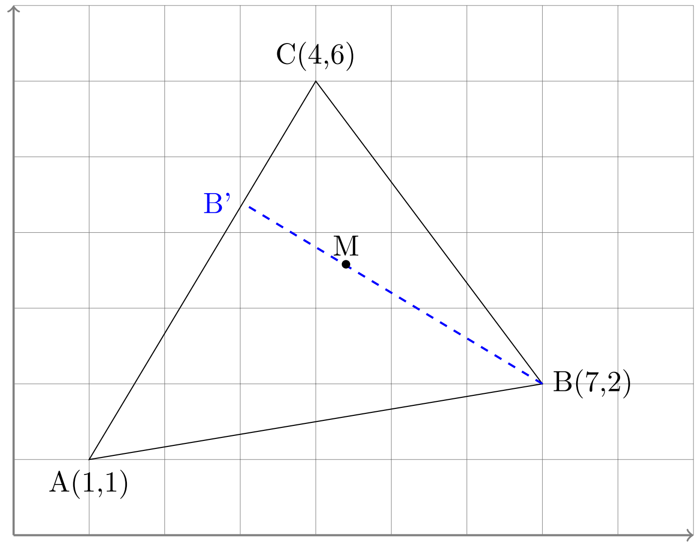
> « Si les trois sommets sont distincts, une hauteur est une droite passant par un sommet et perpendiculaire au côté opposé. Si le triangle est non plat, les trois hauteurs sont concourantes en un point appelé orthocentre, souvent noté H. »

Dans cet exemple, les coordonnées des trois sommets du triangle sont A(1,1), B(9,2) et C(4,6). Voici ce triangle :



6.2.1 Poser les calculs

Pour calculer les coordonnées de l'orthocentre, il faut partir d'un point M positionné sur une hauteur, par exemple (BB'). Comme par définition, les hauteurs forment un angle droit avec leur côté opposé, la hauteur (BB') est perpendiculaire à (AC). Nous obtenons alors le calcul $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.



Nous pouvons donc poser ces équations pour le premier système qui est le calcul d'un produit scalaire dans un repère orthonormé. Voici les coordonnées de $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x_M - x_B \\ y_M - y_B \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$$

Et voici le calcul du produit scalaire :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AC} &= 0 \\ (x_M - x_B)\times(x_C - x_A) + (y_M - y_B)\times(y_C - y_A) &= 0 \\ (x-7)\times(4-1) + (y-2)\times(6-1) &= 0 \\ (x-7)\times 3 + (y-2)\times 5 &= 0 \\ 3x - 21 + 5y - 10 &= 0 \\ 3x + 5y - 31 &= 0 \end{aligned}$$

Nous obtenons une première équation : $3x+5y-31=0$ qui est une équation cartésienne de la hauteur issue de B, c'est-à-dire une équation de la droite (BB').

Nous utilisons le même principe avec $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ et nous avons ces équations :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC} &= 0 \\ (x_M - x_A)\times(x_C - x_B) + (y_M - y_A)\times(y_C - y_B) &= 0 \\ (x-1)\times(4-7) + (y-1)\times(6-2) &= 0 \\ (x-1)\times -3 + (y-1)\times 4 &= 0 \\ -3x + 3 + 4y - 4 &= 0 \\ -3x + 4y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Nous obtenons une deuxième équation : $-3x+4y-1=0$ qui est une équation cartésienne de la hauteur issue de A, c'est-à-dire la droite (AA').

Il suffit maintenant de résoudre ce système à deux équations :

$$\begin{cases} 3x+5y-31=0 \\ -3x+4y-1=0 \end{cases}$$

Isolons x dans la première équation :

$$\begin{aligned} 3x+5y-31 &= 0 \\ x &= \frac{31-5y}{3} \end{aligned}$$

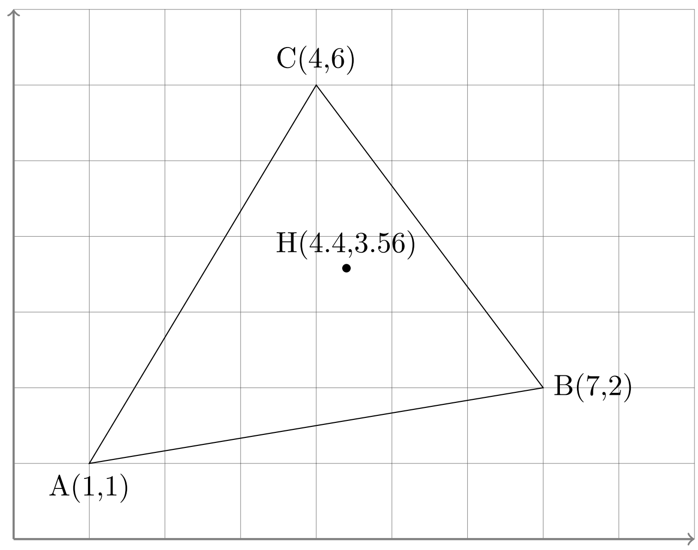
Calculons y à partir de x dans la deuxième équation :

$$\begin{aligned}
-3x+4y-1&=0\\
-3\times\left(\frac{31-5y}{3}\right)+4y-1&=0\\
\frac{-93+15y}{3}+4y-1&=0\\
-93+15y+12y-3&=0\\
27y&=96\\
y&\simeq 3,56
\end{aligned}$$

Terminons en calculant x à partir de y :

$$\begin{aligned}
x&=\frac{31-5\times 3,56}{3}\\
x&\simeq 4,4
\end{aligned}$$

Nous avons maintenant calculé les coordonnées du point H, l'orthocentre du triangle : H(4.4,3.56). Voici l'orthocentre dans notre triangle :



6.2.2 Construire une première hauteur du triangle

Pour tracer les hauteurs dans notre triangle, il faut connaître les équations des hauteurs. Ces hauteurs passent par les points A, B et C et par le point H, l'orthocentre. Dans cet exemple, les hauteurs ne sont pas parallèles à l'axe des ordonnées, dans ce cas, les équations peuvent s'écrire sous la forme : $y = ax + b$.

Voici le calcul de l'équation de la hauteur (AH), avec les points A(1,1) et H(4.4,3.56) :

$$\begin{aligned}
y_A &= a\times x_A + b & \qquad y_H &= a\times x_H + b\\
1 &= a\times 1 + b & 3,56 &\simeq a\times 4,4 + b
\end{aligned}$$

Dans l'équation de la hauteur (AH), isolons a : $a = 1 - b$.

Et dans la deuxième équation, remplaçons a par sa valeur calculée, afin de calculer b :

$$\begin{aligned}
3,56 &\simeq 4,4(1-b)+b\\
3,56 &\simeq 4,4-4,4b+b\\
3,4b &\simeq 0,84\\
b &\simeq 0,25
\end{aligned}$$

Puis terminons en calculant la valeur de a :

$$\begin{aligned}
a &\simeq 1-b\\
a &\simeq 1-0,25\\
a &\simeq 0,75
\end{aligned}$$

Nous venons de calculer l'équation réduite de (AH) : $y = 0,75x + 0,25$. Remarquez que cette équation est équivalente à l'équation cartésienne obtenue précédemment : $-3x + 4y - 1 = 0$.

Avec le même principe de calcul, voici l'équation de la droite (BC) : $y = -1,33x + 11,33$.

Le point d'intersection A' des droites (AH) et (BC) doit résoudre la double équation :

$$\begin{cases} y = 0,75x + 0,25 \\ y = -1,33x + 11,33 \end{cases}$$

Plaçons y de la première équation, dans la seconde :

$$\begin{aligned} 0,75x + 0,25 &= -1,33x + 11,33 \\ 0,75x + 1,33x &= 11,33 - 0,25 \\ 2,08x &= 11,08 \\ x &\simeq 5,33 \end{aligned}$$

Puis, plaçons la valeur de x dans la première équation :

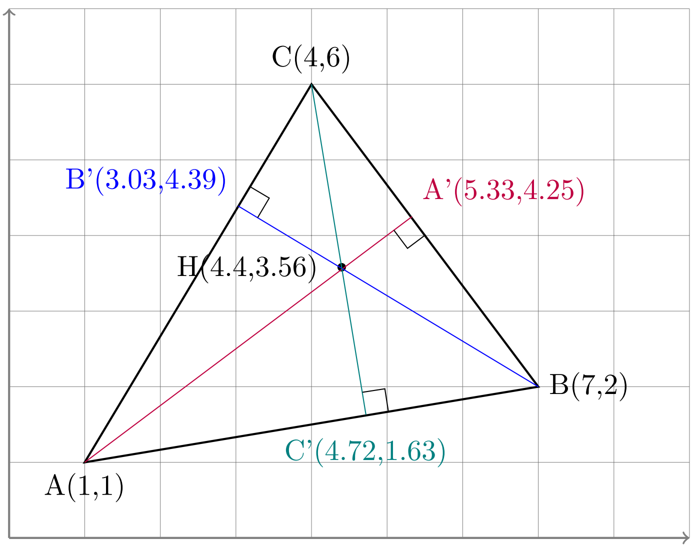
$$\begin{aligned} y &\simeq 0,75 \times 5,33 + 0,25 \\ &\simeq 4,25 \end{aligned}$$

Les coordonnées calculées de A' sont (5.33,4.25).

6.2.3 Construire les deux autres hauteurs du triangle

Il suffit ensuite d'utiliser les mêmes principes pour construire les hauteurs (BB') et (CC') et les coordonnées des points B' et C'.

Voici la figure complète, avec le triangle, l'orthocentre, les trois hauteurs et les angles droits :



Voici le code TikZ pour afficher cette figure complète :

```
\begin{tikzpicture}
  % La grille et les axes
  \draw[help lines] (0,0)grid(9,7);
  \draw[thick,->,gray] (0,0)--(9,0);
  \draw[thick,->,gray] (0,0)--(0,7);
  % Tracé
  \draw[thick] (1,1)node[left]{A(1,1)}--(7,2)node[right]{B(7,2)}--
        (4,6)node[above]{C(4,6)}--cycle;% Le triangle
  \draw (4.4,3.56) node{$\bullet$} node[left=5pt]{H(4.4,3.56)};% L'orthocentre
  % Tracés des hauteurs
  \draw[purple](1,1)--(5.33,4.25)node[above right]{A'(5.33,4.25)};% AA'
```

```
  \draw[blue](7,2)--(3.03,4.39)node[above left]{B'(3.03,4.39)};% BB'
  \draw[teal](4,6)--(4.72,1.63)node[below=5pt]{C'(4.72,1.63)};% CC'
  % Tracés des angles droits
  \draw[rotate around={36.87:(5.33,4.25)}] (5.03,4.25)|-(5.33,3.95);% En A'
  \draw[rotate around={59.34:(3.03,4.39)}](3.03,4.09)-|(3.33,4.39);% En B'
  \draw[rotate around={8.84:(4.72,1.63)}] (4.72,1.93)-|(5.02,1.63);% En C'
\end{tikzpicture}
```

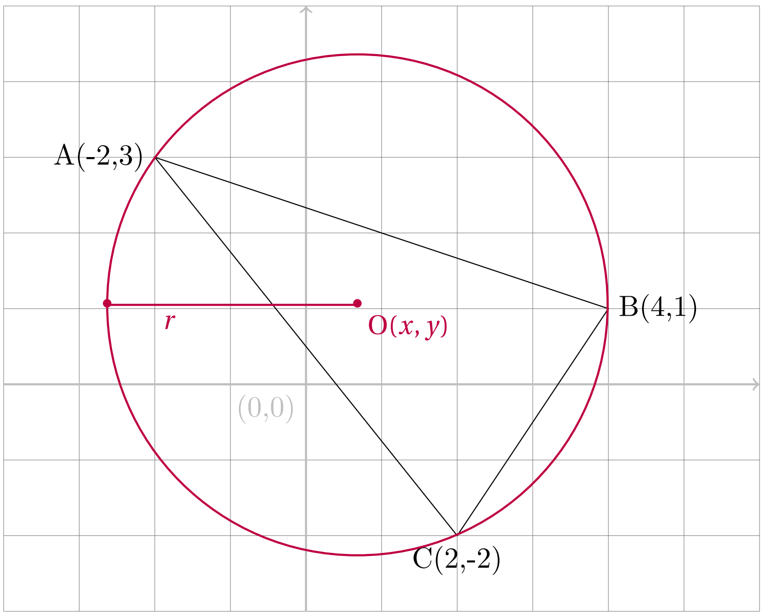
6.3 Tracer le cercle circonscrit d'un triangle

6.3.1 Les éléments connus et à calculer

Voici la définition du cercle circonscrit donnée par Wikipedia :

> « En géométrie, un cercle circonscrit à un polygone est un cercle qui passe par tous les sommets du polygone. »

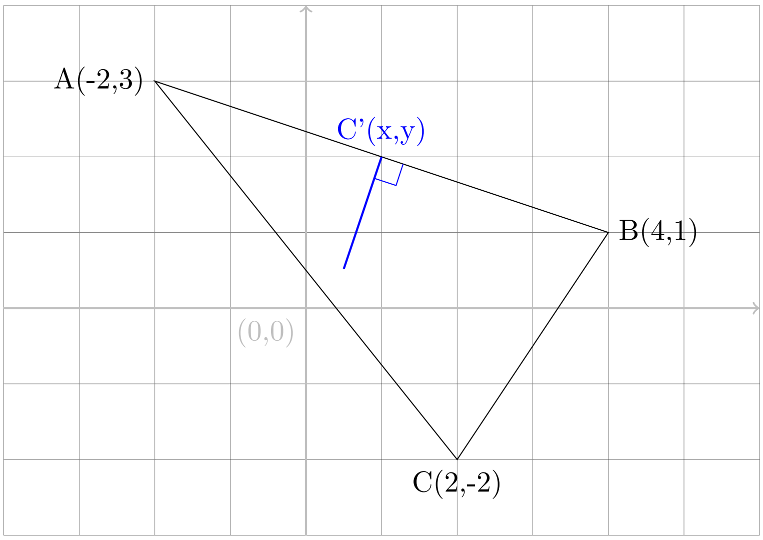
Dans cet exemple, nous connaissons les coordonnées des trois sommets du triangle : A(-2,3), B(4,1) et C(2,-2). Pour tracer avec TikZ le cercle circonscrit au triangle ABC, nous devons connaître les coordonnées de son centre O et son rayon r.



6.3.2 Calculer les équations des médiatrices du triangle

Nous savons que le centre du cercle circonscrit à un triangle est le point d'intersection de trois médiatrices de ce triangle. Rappelons, par exemple, que la médiatrice du segment $[AB]$ est la droite qui passe par le milieu de [AB], noté usuellement C′, et qui est perpendiculaire au segment $[AB]$.

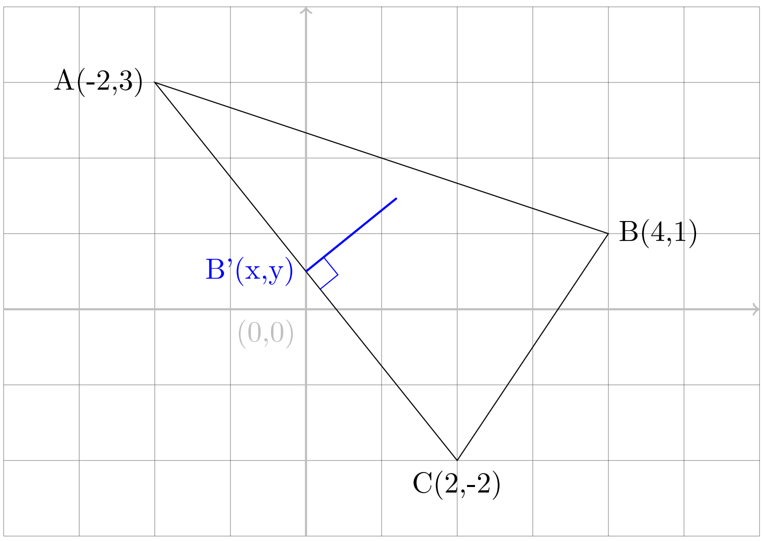
Commençons par rechercher une équation de la médiatrice du segment $[AB]$. Nous pouvons dire que le point M appartient à cette médiatrice, si et seulement si $AM = BM$, c'est-à-dire que $AM^2 = BM^2$. Car la médiatrice de $[AB]$ est l'ensemble des points équidistants de A et B.



Nous avons donc cette équation à résoudre :

$$\begin{gathered}
AM^2 = BM^2 \\
(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 \\
(x+2)^2 + (y-3)^2 = (x-4)^2 + (y-1)^2 \\
x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 \\
x^2 + 4x + y^2 - 6y + 13 = x^2 - 8x + y^2 - 2y + 17 \\
\cancel{x^2} + 4x + \cancel{y^2} - 6y + 13 = \cancel{x^2} - 8x + \cancel{y^2} - 2y + 17 \\
4x - 6y + 13 = -8x - 2y + 17 \\
-4y = -12x + 4 \\
y = 3x - 1
\end{gathered}$$

Les principes sont les mêmes pour rechercher l'équation de la médiatrice de [AC] :



Voici l'équation à résoudre :

$$\begin{aligned}
\mathrm{AM}^2 &= \mathrm{CM}^2\\
(x-x_\mathrm{A})^2+(y-y_\mathrm{A})^2 &= (x-x_\mathrm{C})^2+(y-y_\mathrm{C})^2\\
(x+2)^2+(y-3)^2 &= (x-2)^2+(y+2)^2\\
x^2+4x+4+y^2-6y+9 &= x^2-4x+4+y^2+4y+4\\
x^2+4x+y^2-6y+13 &= x^2-4x+y^2+4y+8\\
\cancel{x^2}+4x+\cancel{y^2}-6y+13 &= \cancel{x^2}-4x+\cancel{y^2}+4y+8\\
4x-6y+13 &= -4x+4y+8\\
-10y &= -8x-5\\
y &= \frac{4}{5}x+\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

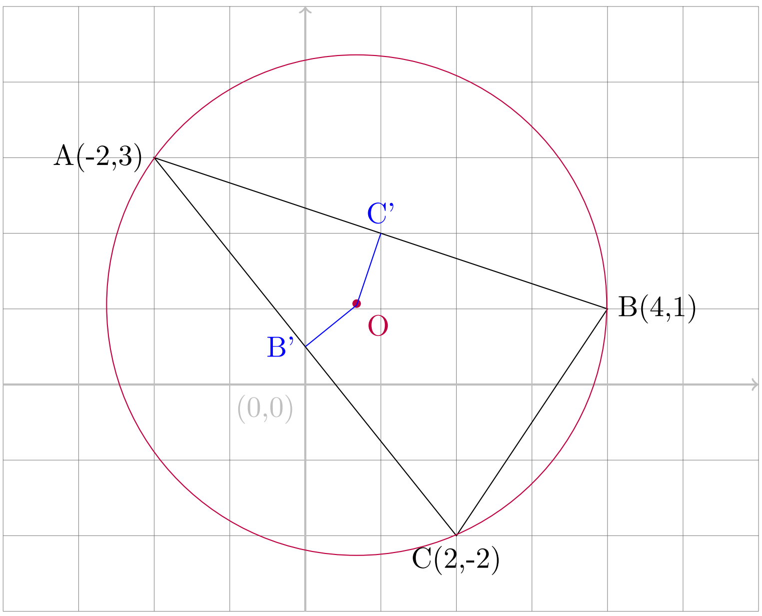
Nous avons maintenant les deux équations des médiatrices des segments [AB] et [AC] :

$$\begin{cases} y = 3x-1\\ y=\frac{4}{5}x+\frac{1}{2}\end{cases}$$

Nous pourrions aussi construire la médiatrice du segment [BC], même si c'est parfaitement facultatif pour notre objectif.

6.3.3 Calculer les coordonnées du centre du cercle

Nous savons que le centre O du cercle circonscrit au triangle est le point d'intersection de la médiatrice de la droite (AB) et de la droite (AC).



Nous pouvons maintenant utiliser les deux équations des médiatrices précédentes pour calculer les coordonnées du centre O du cercle. Le point O doit résoudre les deux équations des médiatrices :

$$\begin{cases} y = 3x-1\\ y=\frac{4}{5}x+\frac{1}{2}\end{cases}$$

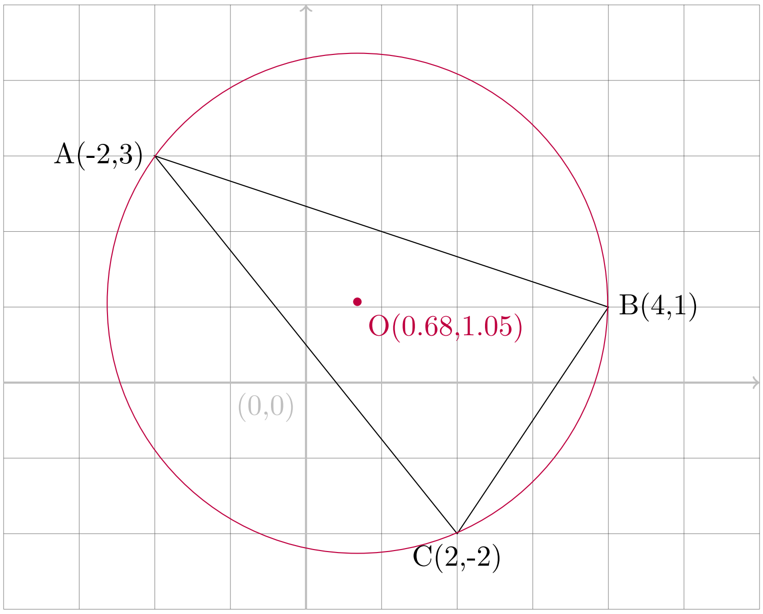
Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
3x-1 &= \frac{4}{5}x+\frac{1}{2}\\
3x-\frac{4}{5}x &= \frac{1}{2}-1\\
\frac{11}{5}x &= 1{,}5\\
x &\simeq 0{,}68
\end{aligned}$$

Et ensuite, nous avons :

$$y \simeq 3 \times 0,68 - 1$$
$$y \simeq 1,05$$

Les coordonnées du centre du cercle circonscrit sont donc O(0.68,1.05).

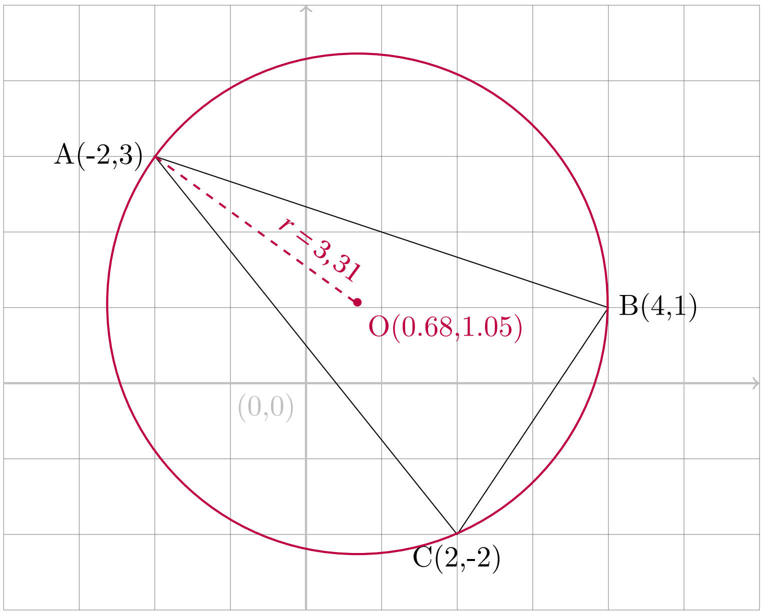


6.3.4 Calculer le rayon du cercle circonscrit

Pour calculer le rayon r en A par exemple, nous utilisons l'équation :

$$r^2 = \mathrm{OA}^2$$
$$r^2 = (x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2$$
$$r^2 \simeq (-2 - 0,68)^2 + (3 - 1,05)^2$$
$$r^2 \simeq 7,18 + 3,80$$
$$r^2 \simeq 10,98$$
$$r \simeq \sqrt{10,98}$$
$$r \simeq 3,31$$

Nous avons maintenant tous les éléments pour tracer le cercle circonscrit à notre triangle :



6.3.5 Calculer les coordonnées des milieux des segments

Pour compléter la figure, nous pouvons calculer les coordonnées des milieux des trois segments du triangle. Le milieu du segment [AB] est noté M_C, celui du segment [AC] est noté M_B et celui du [BC] est noté M_A. Voici les calculs des coordonnées des milieux des trois côtés du triangle :

$$M_A\left(\frac{x_B+x_C}{2},\frac{y_B+y_C}{2}\right) \qquad M_B\left(\frac{x_A+x_C}{2},\frac{y_A+y_C}{2}\right) \qquad M_C\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

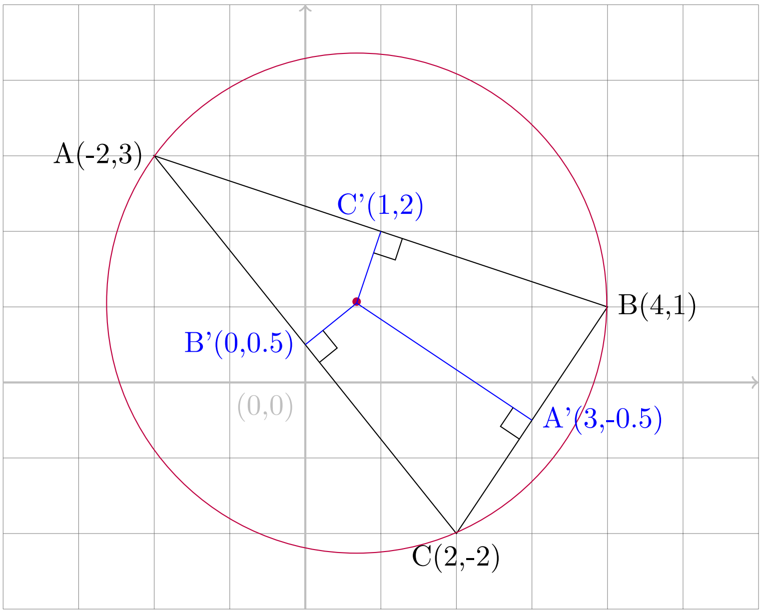
$$M_A\left(\frac{4+2}{2},\frac{1-2}{2}\right) \qquad M_B\left(\frac{-2+2}{2},\frac{3-2}{2}\right) \qquad M_C\left(\frac{-2+4}{2},\frac{3+1}{2}\right)$$

$$M_A\left(\frac{6}{2},-\frac{1}{2}\right) \qquad M_B\left(\frac{0}{2},\frac{1}{2}\right) \qquad M_C\left(\frac{2}{2},\frac{4}{2}\right)$$

$$M_A(3,-0.5) \qquad M_B(0,0.5) \qquad M_C(1,2)$$

6.3.6 Tracer la figure complète

Nous avons maintenant tous les éléments nécessaires pour tracer avec TikZ la figure complète, avec le cercle circonscrit, son centre, les médiatrices et de leur milieu :



Voici le code TikZ pour afficher cette figure complète :

```
\begin{tikzpicture}
  % La grille et les axes
  \draw[help lines] (-4,-3) grid (6,5);
  \draw[thick,lightgray,->] (-4,0)--(6,0);% Axe X
  \draw[thick,lightgray,->] (0,-3)--(0,5);% Axe Y
  \node[lightgray,below left] at (0,0) {(0,0)};% Origine
  % Le triangle
  \draw (-2,3)node[left]{A(-2,3)}--(4,1)node[right]{B(4,1)}--(2,-2)node[below]{C(2,-2)}
        --cycle;% Le triangle
  % Le cercle circonscrit
  \draw[purple] (0.68,1.05)circle(3.31);% Cercle
  \draw[purple] (0.68,1.05) node{$\bullet$};% Centre
  % Les médiatrices
  \draw[blue] (0.68,1.05)--(3,-0.5)node[right]{A'(3,-0.5)};% En A
  \draw[blue] (0.68,1.05)--(0,0.5)node[left]{B'(0,0.5)};% En B
  \draw[blue] (0.68,1.05)--(1,2)node[above]{C'(1,2)};% En C
  % Les rectangles
  \draw[rotate around={-18.19:(1,2)}] (1,1.7)-|(1.3,2);% En Mc
```

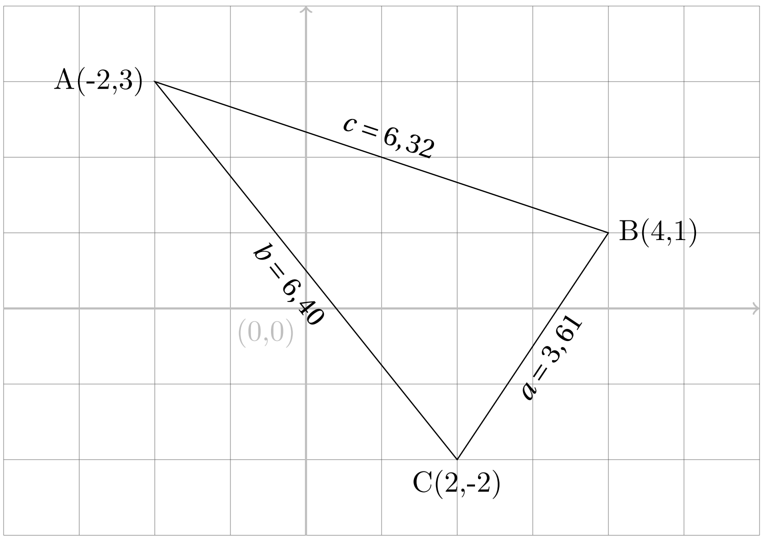
```
  \draw[rotate around={39.05:(0,0.5)}] (0.3,0.5)|-(0,0.2);% En Mb
  \draw[rotate around={56.1:(3,-0.5)}] (2.7,-0.5)|-(3,-0.2);% En Ma
\end{tikzpicture}
```

6.4 Tracer le cercle inscrit d'un triangle

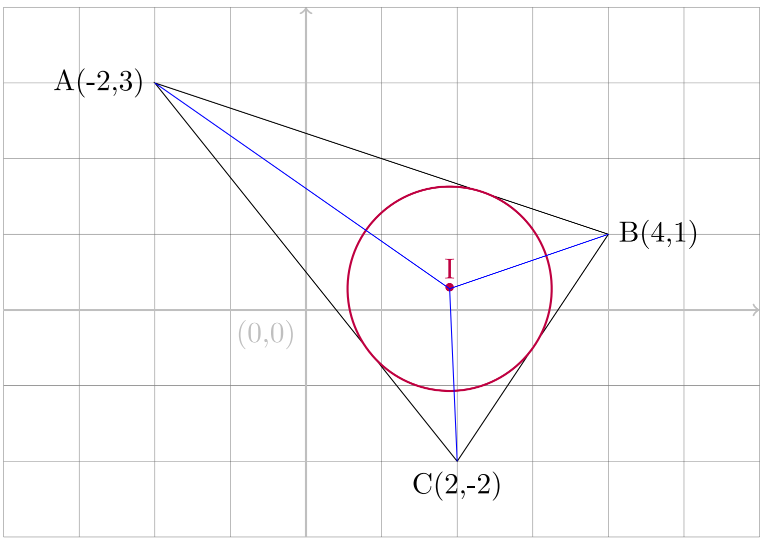
Voici la définition d'un cercle inscrit donnée par Wikipedia :

> « Il existe un et un seul cercle intérieur au triangle et tangent à la fois à ses trois côtés. Ce cercle est appelé « cercle inscrit » dans le triangle. C'est le plus grand cercle que peut contenir ce triangle. »

Pour cet exemple, nous reprenons le triangle précédent. Voici les coordonnées des trois sommets et les longueurs des segments :



Rappelons que le centre I du cercle inscrit dans le triangle ABC est le point d'intersection des trois bissectrices de ce triangle. La bissectrice est une demi-droite qui coupe un angle en deux angles de même mesure.



Pour calculer les coordonnées du centre $\mathrm{I}(x, y)$ du cercle inscrit, nous partons de ces équations :

$$x_\mathrm{I} = \frac{a \times x_\mathrm{A}}{a+b+c} + \frac{b \times x_\mathrm{B}}{a+b+c} + \frac{c \times x_\mathrm{C}}{a+b+c} \qquad y_\mathrm{I} = \frac{a \times y_\mathrm{A}}{a+b+c} + \frac{b \times y_\mathrm{B}}{a+b+c} + \frac{c \times y_\mathrm{C}}{a+b+c}$$

Nous connaissons :

– Les longueurs $a = 3,61$, $b = 6,40$ et $c = 6,32$. Ces longueurs sont facilement connues avec les méthodes de calcul vues précédemment.
– Les coordonnées des trois sommets du triangle : A(-2,3), B(4,1) et C(2,-2).

Nous avons donc pour x_I :

$$\begin{aligned} x_\mathrm{I} &= \frac{3,61 \times -2}{3,61+6,40+6,32} + \frac{6,40 \times 4}{3,61+6,40+6,32} + \frac{6,32 \times 2}{3,61+6,40+6,32} \\ &= \frac{-7,22}{16,33} + \frac{25,6}{16,33} + \frac{12,64}{16,33} \\ &\simeq -0,44+1,57+0,77 \\ &\simeq 1,9 \end{aligned}$$

Nous avons donc pour y_I :

$$\begin{aligned} y_\mathrm{I} &= \frac{3,61 \times 3}{3,61+6,40+6,32} + \frac{6,40 \times 1}{3,61+6,40+6,32} + \frac{6,32 \times -2}{3,61+6,40+6,32} \\ &= \frac{10,83}{16,33} + \frac{6,40}{16,33} + \frac{-12,64}{16,33} \\ &\simeq 0,66+0,39-0,77 \\ &\simeq 0,28 \end{aligned}$$

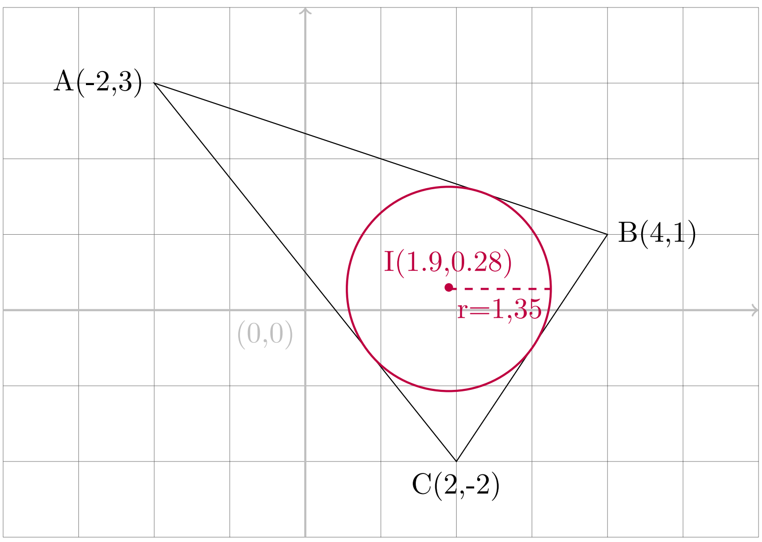
Les coordonnées du centre du cercle inscrit sont donc I(1.90,0.28).
Pour calculer le rayon du cercle inscrit, nous utilisons la formule de Héron (Wikipedia) :

$$r^2 = \frac{(a+b-c)\times(a-b+c)\times(-a+b+c)}{4\times(a+b+c)}$$

Avec les valeurs connues, nous avons :

$$\begin{aligned} r^2 &\simeq \frac{3,69\times3,53\times9,11}{4\times16,33} \\ r^2 &\simeq \frac{118,66}{65,32} \\ r^2 &\simeq 1,82 \\ r &\simeq \sqrt{1,82} \\ r &\simeq 1,35 \end{aligned}$$

Le rayon du cercle inscrit est donc égal à 1,35.
Nous avons tous les éléments pour tracer notre cercle inscrit dans notre exemple :



Voici le code complet TikZ pour afficher cette figure :

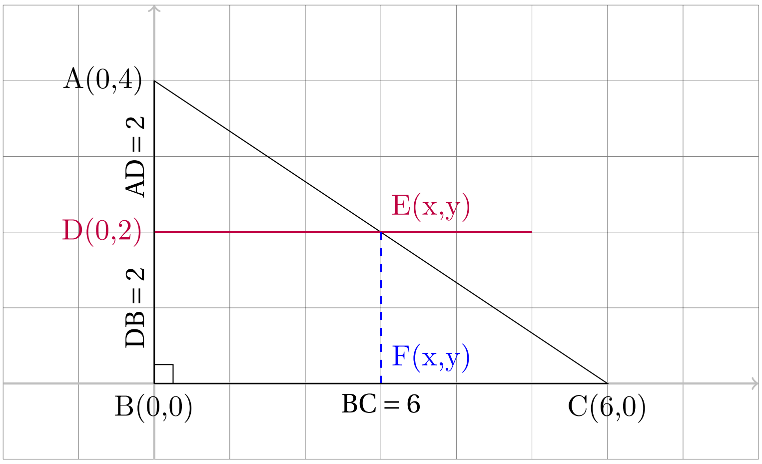
```
\begin{tikzpicture}
  % La grille et les axes
  \draw[help lines] (-4,-3) grid (6,4);
  \draw[thick,lightgray,->] (-4,0)--(6,0);% Axe X
  \draw[thick,lightgray,->] (0,-3)--(0,4);% Axe Y
  \node[lightgray,below left] at (0,0) {(0,0)};% Origine
  % Le triangle
  \draw (-2,3)node[left]{A(-2,3)}--(4,1)node[right]{B(4,1)}--
        (2,-2)node[below]{C(2,-2)}--cycle;% Le triangle
  % Le cercle inscrit
  \draw[purple,thick] (1.9,0.28)circle(1.35);
  \node[purple] at (1.9,0.28) {$\bullet$};% Le point central
  \draw[purple,dashed,thick] (1.9,0.28)node[above]{I(1.9,0.28)}--
        (1.9+1.35,0.28)node[below,midway]{r=1,35};% Rayon
\end{tikzpicture}
```

6.5 Tracer un rectangle dans un triangle rectangle

L'objectif est de tracer un rectangle dans un triangle aux coordonnées connues. Dans cet exemple, voici les éléments connus :

- Les coordonnées des sommets du triangle sont A(0,4), B(0,0) et C(6,0).
- Le triangle ABC est rectangle en B.
- D est sur le segment [BA] et $BD = DA = 2$.
- La droite passant par D est parallèle à [BC] et coupe [AC] en E.

Voici le schéma avec les données connues et celles à calculer :



L'objectif est donc de connaître les coordonnées de E et de F, afin de pouvoir tracer le rectangle BDEF avec TikZ.

Avec le théorème de Thalès, nous savons que :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

Nous connaissons les longueurs : $AB = 4$, $AD = 2$, $DB = 2$ et $BC = 6$.
Commençons par calculer [AC], avec le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ &= 4^2 + 6^2 \\ &= 16 + 36 \\ &= 52 \\ AC &= \sqrt{52} \\ AC &\simeq 7,21 \end{aligned}$$

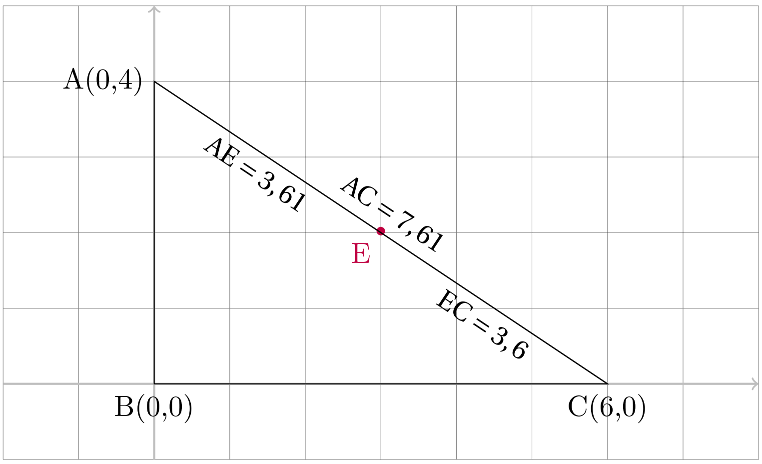
Nous pouvons maintenant calculer [AE] :

$$\begin{aligned}\frac{AD}{AB} &= \frac{AE}{AC}\\ \frac{2}{4} &= \frac{AE}{7,21}\\ AE &= \frac{2\times 7,21}{4}\\ &= \frac{14,42}{4}\\ &\simeq 3,61\end{aligned}$$

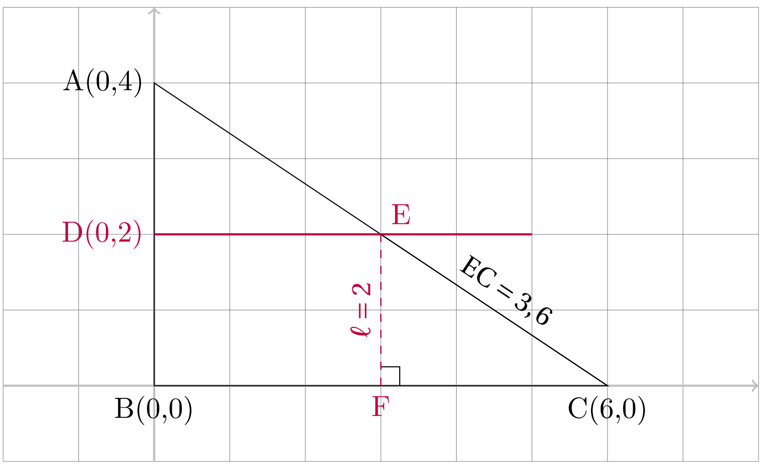
Nous pouvons maintenant calculer [EC], car E est sur le segment [AC] :

$$\begin{aligned}&AC = AE + EC\\ &EC = AC - AE\\ &EC \simeq 7,21 - 3,61\\ &EC \simeq 3,6\end{aligned}$$

Voici les longueurs calculées, [AC], [AE] et [EC] sur la figure :



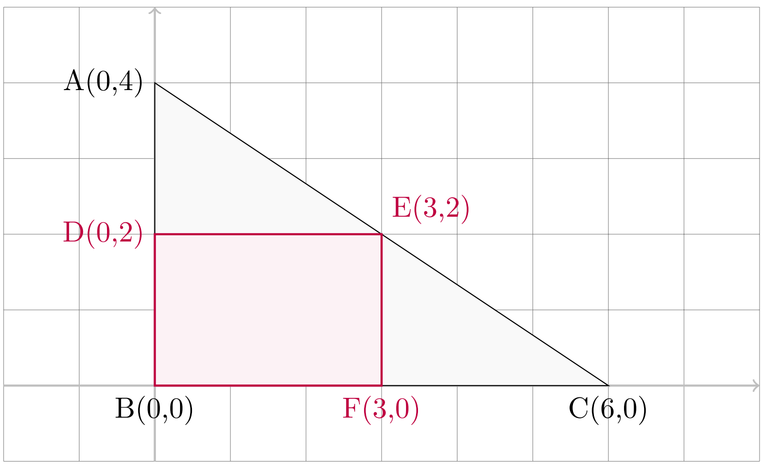
Nous savons que le triangle EFC est rectangle en F, car la parallèle à (AB) passe par E et coupe [BC] en F.



À nouveau avec le théorème de Pythagore nous pouvons calculer FC :

$$\begin{aligned}
EC^2 &= EF^2 + FC^2\\
FC^2 &= EC^2 - EF^2\\
&= 3{,}6^2 - 2^2\\
&= 12{,}96 - 4\\
&= 8{,}96\\
FC &= \sqrt{8{,}96}\\
&\simeq 3
\end{aligned}$$

Nous avons maintenant tous les éléments nécessaires pour tracer le rectangle BDEF dans le triangle ABC :



Voilà le code TikZ complet pour tracer cette figure :

```
\begin{tikzpicture}
  % La grille
  \draw[help lines](-2,-1)grid(8,5);
  \draw[->,lightgray,thick](-2,0)--(8,0);
  \draw[->,lightgray,thick](0,-1)--(0,5);
  % Le triangle
  \filldraw[fill=gray!5](0,4)node[left]{A(0,4)}--(0,0)node[left]{B(0,0)}--(6,0)
    node[right]{C(6,0)}--cycle;
  % Le rectangle
  \filldraw[fill=purple!5,thick,draw=purple](0,0)rectangle(3,2);
  \node[left,purple] at (0,2) {D(0,2)};
  \node[above right,purple] at (3,2) {E(3,2)};
  \node[below,purple] at (3,0) {F(3,0)};
\end{tikzpicture}
```

7 Exploiter les transformations TikZ

7.1 Les transformations

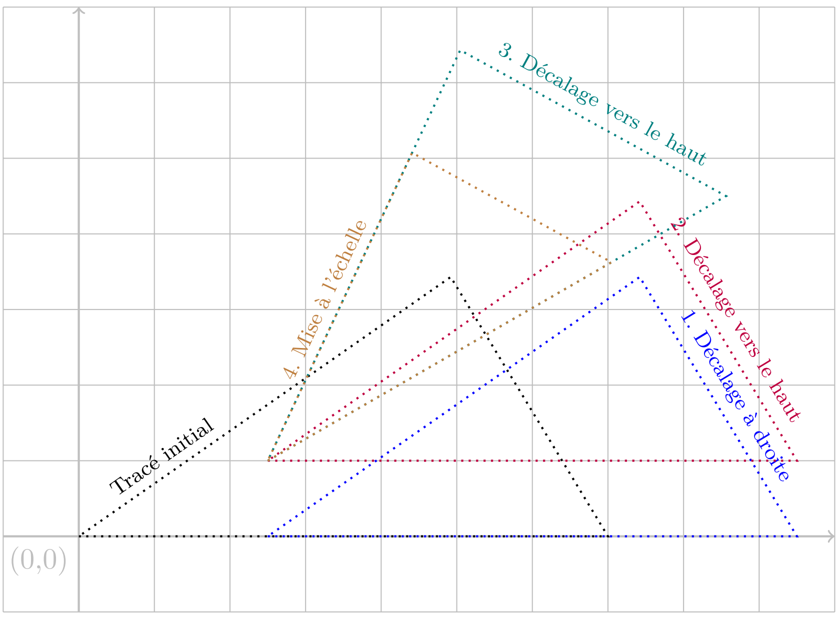
Nous pouvons créer un triangle simple de base pour plus de facilité et ensuite vouloir le placer et le redimensionner à sa place définitive voulue. Pour ce faire, nous pouvons utiliser l'environnement `scope` dans l'environnement `tikzpicture`. Il y a bien une « imbrication » des environnements, puisque `scope` est inclus dans `tikzpicture`. Notez bien aussi que chaque environnement `scope` est autonome dans l'application des transformations.

7.2 Premier exemple

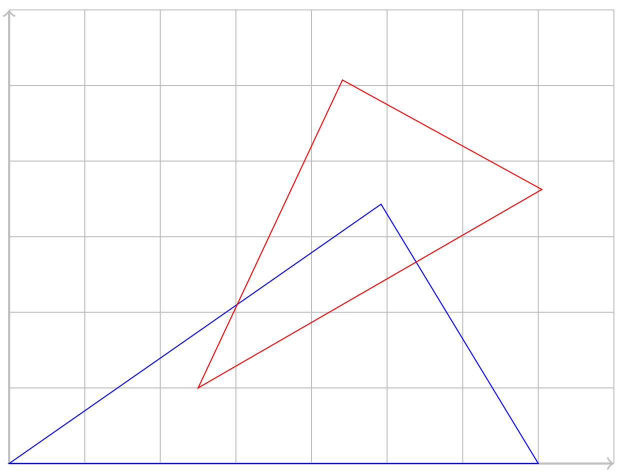
Voici un exemple avec un triangle initial parfaitement défini (en tirets noirs sur la figure) et avec quatre transformations successives : un déplacement horizontal, un déplacement vertical, une rotation et une mise à l'échelle. Ces transformations se font dans l'ordre de leur déclaration.

```
\begin{tikzpicture}
  ...
  \begin{scope}
    \draw[xshift=2.5cm,yshift=1cm,rotate=30,scale=0.75] (0,0)--(7,0)--(4.92,3.43)--cycle;
  \end{scope}
  ...
\end{tikzpicture}
```

1. `xshift=2.5cm` : le triangle est déplacé vers la droite de 2,5 cm. En pointillé bleu sur le schéma.
2. `yshift=1cm` : le triangle est déplacé vers le haut de 1 cm. En pointillé rouge sur le schéma.
3. `rotate=30` : le triangle subit une rotation de 30°. En pointillé vert sur le schéma.
4. `scale=0.75` : le triangle subit une mise à l'échelle de 75%. En pointillé marron sur le schéma.



Voici le triangle initial en bleu et le triangle final en rouge :



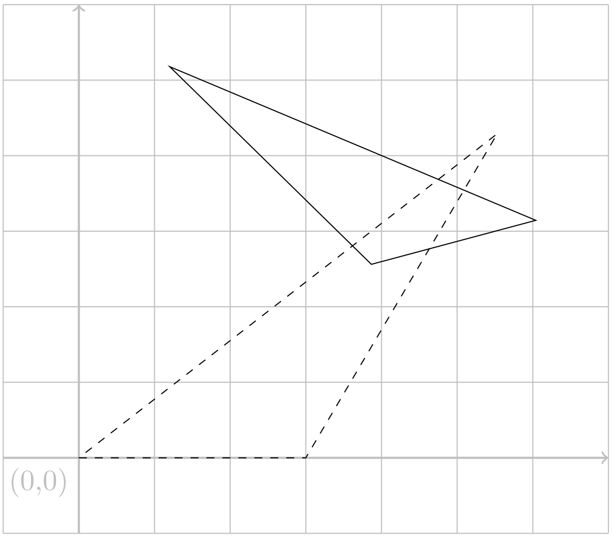
7.3 Deuxième exemple

Voici un deuxième exemple :

```
\begin{tikzpicture}
  ...
  \draw[xshift=3cm,xscale=-1,rotate=-15,scale=0.75,xshift=-5cm,yshift=3cm]
    (0,0)--(3,0)--(5.53,4.29)--cycle;
  ...
\end{tikzpicture}
```

1. `xshift=3cm` et `xscale=-1` : avec cette double transformation, le triangle subit un effet mirroir.
2. `rotate=-15` : le triangle subit une rotation de $-15°$.
3. `scale=0.75` : le triangle subit une mise à l'échelle de 75%.
4. `xshift=-5cm` : le triangle est déplacé vers la gauche de 5 cm.
5. `yshift=3cm` : le triangle est déplacé vers le haut de 3 cm.

En pointillé, le triangle initial ; en trait plein le triangle final obtenu après les transformations :

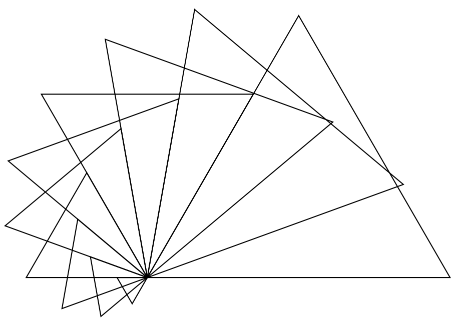


8 Utiliser les boucles foreach de TikZ

Et pour terminer, voici l'utilisation de boucles `foreach` pour créer des graphiques spéciaux à partir de triangles :

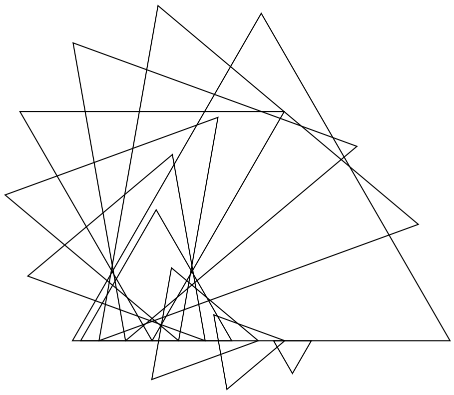
Premier exemple :

```
\begin{tikzpicture}
  \foreach \v in {0,10,...,90}{
    \draw[rotate=\v*2,scale=1-\v/100] (0,0)--(4,0)--+(120:4)--cycle;
  }
\end{tikzpicture}
```



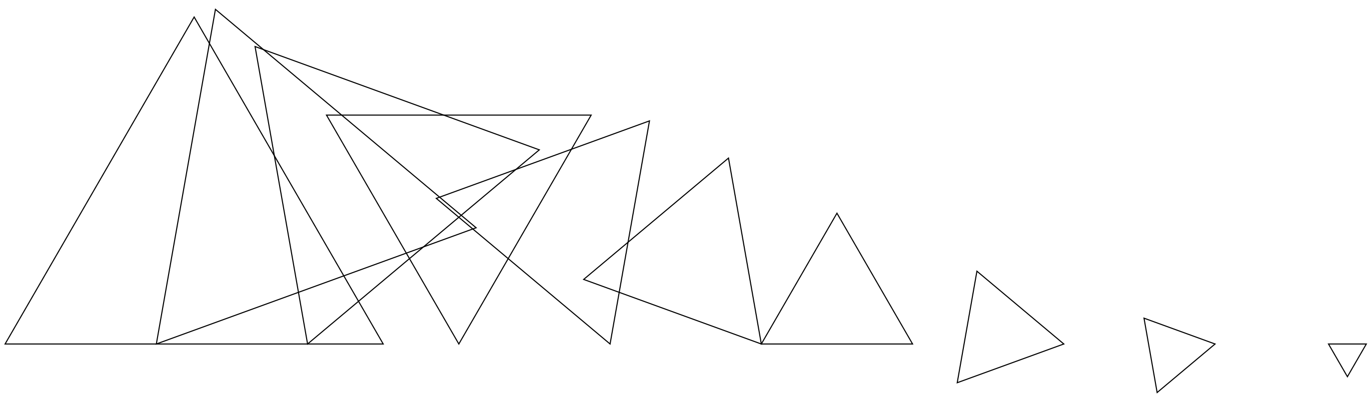
Deuxième exemple :

```
\begin{tikzpicture}
  \foreach \v in {0,10,...,90}{
    \draw[xshift=\v pt,rotate=\v*2,scale=1-\v/100] (0,0)--(5,0)--+(120:5)--cycle;
  }
\end{tikzpicture}
```



Troisième exemple :

```
\begin{tikzpicture}
  \foreach \v in {0,1,...,9}{
    \draw[xshift=2*\v cm,rotate=\v*20,scale=1-\v/10] (0,0)--(5,0)--+(120:5)--cycle;
  }
\end{tikzpicture}
```



Quatrième exemple :

```
\begin{tikzpicture}
  \foreach \v in {0,...,5}{
    \draw[rotate around={\v*20:(2,1.16)}] (0,0)--(4,0)--+(120:4)--cycle;
  }
\end{tikzpicture}
```