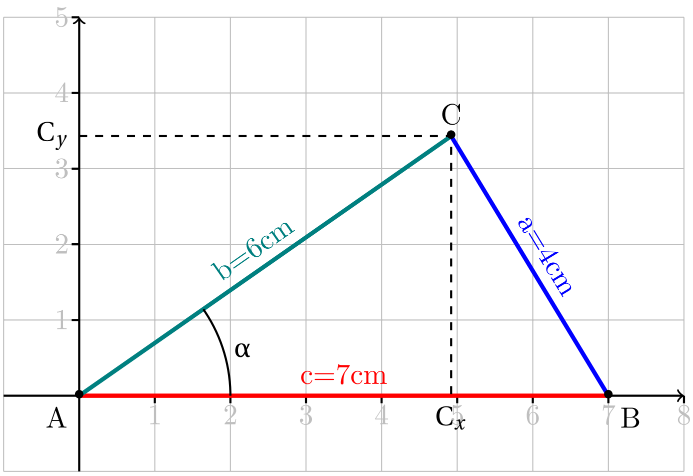
1 Tracer un triangle défini par ses longueurs

1.1 L'objectif

Nous avons un triangle avec ses trois points de sommet, A, B et C. Nous connaissons la longueur des trois côtés : la longueur a entre B et C est de 4 cm, la longueur b entre A et C est de 6 cm et la longueur c entre A et B est de 7 cm. Les points A et B sont placés sur l'axe des abscisses pour plus de facilité de calcul et le point A est placé à l'origine (0,0). De ce fait, nous connaissons les coordonnées de ces deux points A et B : A(0,0) et B(7,0).

L'objectif est de connaître les coordonnées cartésiennes du point C du triangle, avec le calcul de la valeur de α.



1.2 La méthode de calcul

1.2.1 Le théorème d'Al Kashi

Pour connaître les coordonnées cartésiennes du point C (et celles des deux autres points A et B du triangle, si elles n'étaient pas connues), il faut se baser sur le théorème d'Al Kashi (voir sur Wikipedia).

Le cosinus d'un angle est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés adjacents, moins le carré de la longueur du côté opposé ; divisé par deux fois le produit des longueurs des côtés adjacents.

$$\cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \times b \times c}$$

Pour la suite des calculs, le principe sera le même pour les deux autres angles, β en $\widehat{B}$ et γ en $\widehat{C}$:

$$\cos(\beta) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \times a \times c} \qquad \cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \times a \times b}$$

1.2.2 Le calcul de l'angle alpha

Nous connaissons les longueurs des trois côtés : $a = 4\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$ et $c = 7\,\text{cm}$. Nous pouvons donc calculer le cosinus de l'angle $\widehat{CAB}$, c'est-à-dire $\cos(\alpha)$:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \times b \times c} \\ &= \frac{6^2 + 7^2 - 4^2}{2 \times 6 \times 7} \\ &= \frac{36 + 49 - 16}{84} \\ &= \frac{69}{84} \\ &\simeq 0,82\end{aligned}$$

Pour connaître la valeur de l'angle α à partir de son cosinus, nous pouvons utiliser une simple calculatrice préalablement programmée en degrés :

1. Saisissez la valeur du cosinus calculée : **0,82**.
2. Appuyez sur la touche **2$^{\mathbf{nd}}$** : la touche **cos** devient **cos^{-1}**.
3. Appuyez sur la touche **cos^{-1}**.
4. Vous obtenez la valeur arrondie de **34,92** degrés.

L'angle α a pour valeur 34.92°.

1.2.3 Le calcul des coordonnées du point C

Maintenant que nous connaissons la valeur de l'angle $\alpha = 34.92°$, nous pouvons calculer les coordonnées du point C :

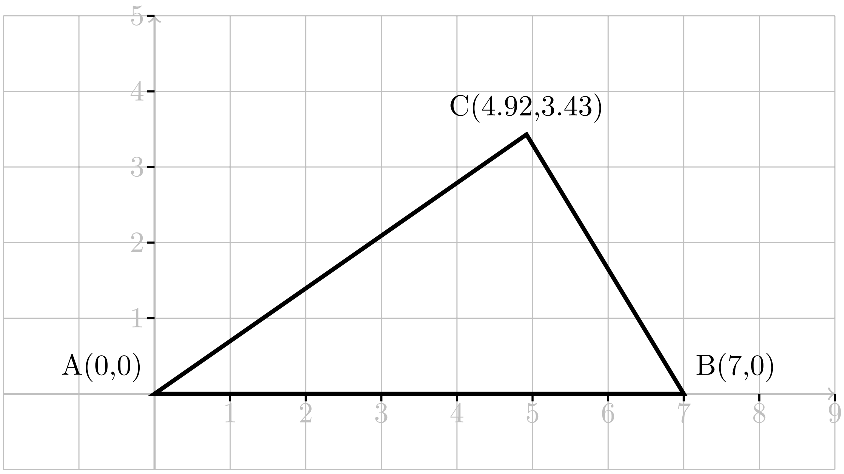
$$\begin{aligned} x_C &= b \times \cos(\alpha) & \qquad y_C &= b \times \sin(\alpha) \\ &\simeq 6 \times \cos(34,92) & &\simeq 6 \times \sin(34,92) \\ &\simeq 6 \times 0,82 & &\simeq 6 \times 0,57 \\ &\simeq 4,92 & &\simeq 3,42 \end{aligned}$$

Les coordonnées cartésiennes du point C sont donc : (4.92,3.42).

Attention, ce calcul n'est valable que si le point C possède une valeur en ordonnée positive, ce qui est initialement le cas dans cet exemple, C(4,5).

1.2.4 Le tracé du triangle

Nous avons tous les éléments nécessaires pour tracer le triangle voulu, avec les valeurs approximatives calculées précédemment. Mais la précision est suffisante pour ces exemples de graphiques simples.



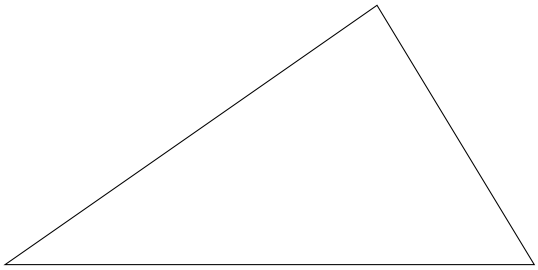
Voici la syntaxe TikZ pour tracer le triangle seul à partir des points A, B et C.

```
\begin{tikzpicture}
  \draw (0,0)--(7,0);% Segment AB
  \draw (7,0)--(4.92,3.43);% Segment BC
  \draw (0,0)--(4.92,3.43);% Segment AC
\end{tikzpicture}
```

Nous pouvons simplifier cette syntaxe en une seule ligne :

```
\begin{tikzpicture}
  \draw (0,0)--(7,0)--(4.92,3.43)--cycle;
\end{tikzpicture}
```

Voici l'affichage du triangle seul :



1.2.5 Le calcul des coordonnées du point C dans TikZ

Dans l'exemple précédent, nous avons calculé les coordonnées du point C. Mais avec TikZ, nous pouvons effectuer des calculs directement dans l'indication des coordonnées des points.

Nous savons que les coordonnées du point C sont : $x_C = b \times cos(\alpha)$ et $y_C = b \times sin(\alpha)$. Et les valeurs b et α sont connues : 6 et 34,92. Nous pouvons donc utiliser cette syntaxe TikZ :

```
\begin{tikzpicture}
  \draw (0,0)--(7,0)--(6*cos{34.92},6*sin{34.92})--cycle;
\end{tikzpicture}
```

Nous obtenons bien sûr strictement le même tracé.

1.2.6 Le calcul des angles beta et gamma

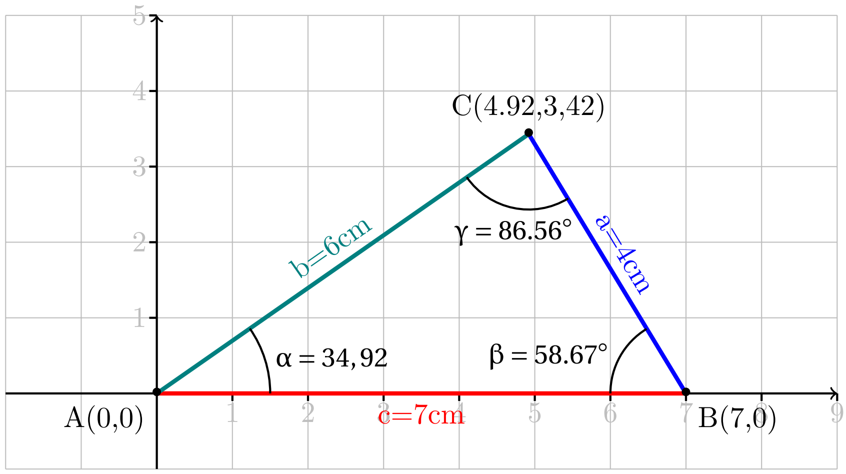
Nous pouvons maintenant calculer, si besoin est car c'est totalement facultatif pour tracer le triangle, les angles β ($\widehat{ABC}$) et γ ($\widehat{ACB}$). Voici les calculs :

$$\begin{aligned}
\cos(\beta) &= \frac{a^2+c^2-b^2}{2\times a\times c} \\
&= \frac{4^2+7^2-6^2}{2\times 4\times 7} \\
&= \frac{16+49-36}{2\times 4\times 7} \\
&= \frac{29}{56} \\
&\simeq 0,52 \\
\beta &\simeq 58.67^\circ
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\cos(\gamma) &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2\times a\times b} \\
&= \frac{4^2+6^2-7^2}{2\times 4\times 6} \\
&= \frac{16+36-49}{2\times 4\times 6} \\
&= \frac{3}{49} \\
&\simeq 0,06 \\
\gamma &\simeq 86.56^\circ
\end{aligned}$$

Avec les arrondis utilisés, la somme des trois angles, α,β et γ, est bien égal à 180°.

1.2.7 Le tracé complet du triangle

Voici le tracé du triangle complet, avec toutes les valeurs connues et calculées :



Voici la syntaxe TikZ pour tracer ce triangle seul :

```
\begin{tikzpicture}
  \draw (0,0)--(7,0)--(4.92,3.43)--cycle;
\end{tikzpicture}
```

Et voilà la syntaxe avec le calcul direct des coordonnées du point C, dans la syntaxe TikZ :

```
\begin{tikzpicture}
  \draw (0,0)--(7,0)--(6*cos{34.92},6*sin{34.92})--cycle;
\end{tikzpicture}
```

Et pour terminer, voici le code TikZ complet pour afficher la figure avec tous les éléments graphiques :

```
\begin{tikzpicture}
  % La grille et les axes
  \draw[thin,lightgray] (-2,-1) grid (9,5);
  \draw[thick,->] (-2,0)--(9,0);
  \foreach \x in {1,...,9} {
    \draw[below,lightgray](\x,0) node{\x};
    \draw[thick] (\x,0) --(\x,-0.1);
  };
  \draw[thick,->] (0,-1)--(0,5);
  \foreach \y in {1,...,5} {
    \draw[left,lightgray](0,\y) node{\y};
    \draw[thick] (-0.1,\y) --(0,\y);
  };
  % Tracé AB
  \draw[ultra thick,red] (0,0) node[black,below left]{A(0,0)}--(7,0)
        node[black,below right]{B(7,0)} node[below,midway]{c=7cm};
  % Tracé BC
  \draw[ultra thick,blue] (7,0)--(4.92,3.43) node[black,above]{C(4.92,3,42)}
        node[above,midway,sloped]{a=4cm};
  % Tracé AC
  \draw[ultra thick,teal] (0,0)--(4.92,3.43) node[above,midway,sloped]{b=6cm};
  % Les points
  \node at (0,0) {$\bullet$};% Point A
  \node at (7,0) {$\bullet$};% Point B
  \node at (4.92,3.43) {$\bullet$};% Point C
  % Angle alpha
  \draw[thick] (1.5,0) arc (0:34.91:1.5) node[midway,right]{$\alpha=34,92$};
  % Angle gamma
  \draw[thick] (4.1,2.86)arc(34.91:121.47:-1) node[below,midway]{$\gamma=\ang{86,56}$};
  % Angle beta
  \draw[thick] (6,0)arc(0:-58.56:-1) node[left,midway]{$\beta=\ang{58,67}$};
\end{tikzpicture}
```