Tracer des points, des segments et des figures en coordonnées polaires, avec TikZ

Christophe AUBRY

Février 2022

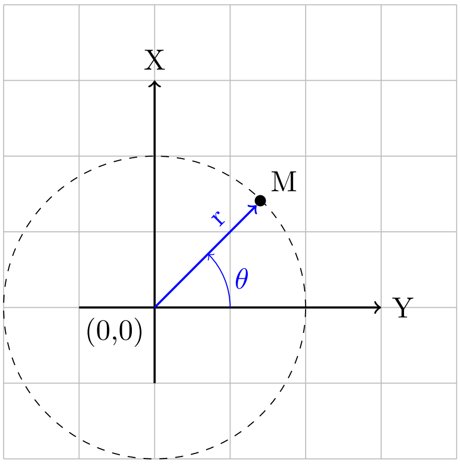
Table des matières

1 Positionner un point

1.1 Connaître la syntaxe

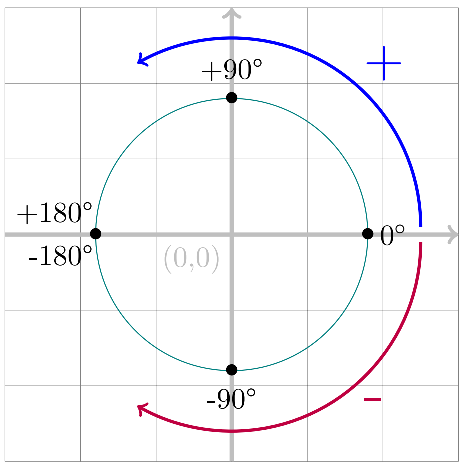
Voici la définition de la coordonnée polaire d'un point donnée par Wikipedia : « Comme il s'agit d'un système bidimensionnel, chaque point est déterminé par ses deux coordonnées polaires, la coordonnée radiale et la coordonnée angulaire. La coordonnée radiale (souvent notée r ou p, et appelée rayon) exprime la distance du point à un point central appelé pôle (équivalent à l'origine des coordonnées cartésiennes). La coordonnée angulaire (également appelée angle polaire ou azimut, et souvent notée θ ou t) exprime la mesure, dans le sens trigonométrique (sens positif), de l'angle entre le point et la demi-droite d'angle 0°, appelée axe polairea. »

La position d'un point M est définie par le rayon `r` et l'angle θ, par rapport à l'origine (0,0). Dans TikZ, la syntaxe est : `\draw(angle:rayon);`



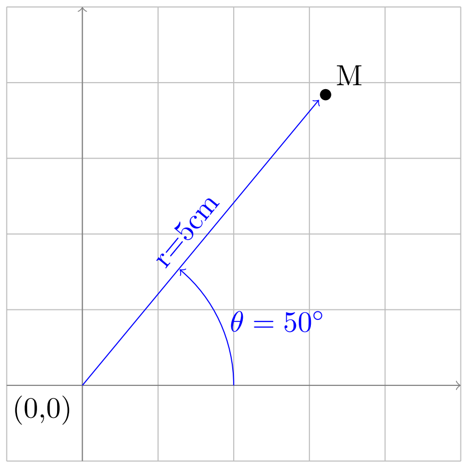
1.2 Comprendre les sens trigonométriques

Commençons par rappeller les sens usuels en trigonométrie :
— Le zéro est à droite du cercle trigonométrique.
— Le sens positif, ou sens trigonométrique va vers en haut à gauche, dans le sens antihoraire.
— Le sens négatif, ou sens anti-trigonométrique va vers en bas à gauche, dans le sens horaire.



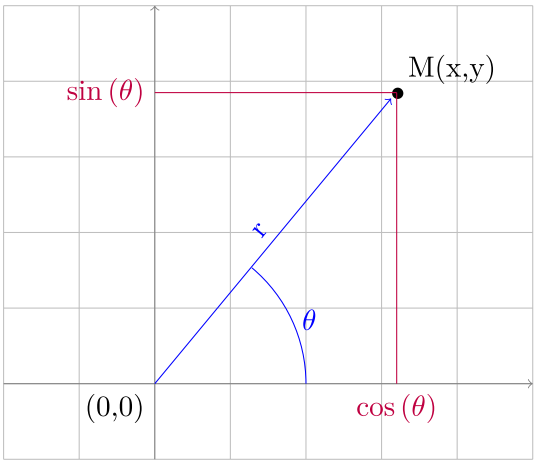
1.3 Positionner un point

Voici un exemple d'un point défini en coordonnées polaires : `\draw (50:5);`. Le positionnement du point se calcule par définition même, par rapport à l'origine (0,0) : l'angle est de 50° et le rayon est de 5 cm. La valeur de l'angle est positive, nous allons donc dans le sens trigonométrique, vers le haut par rapport à l'axe des abscisses.



1.4 Calculer les coordonnées cartésiennes d'un point

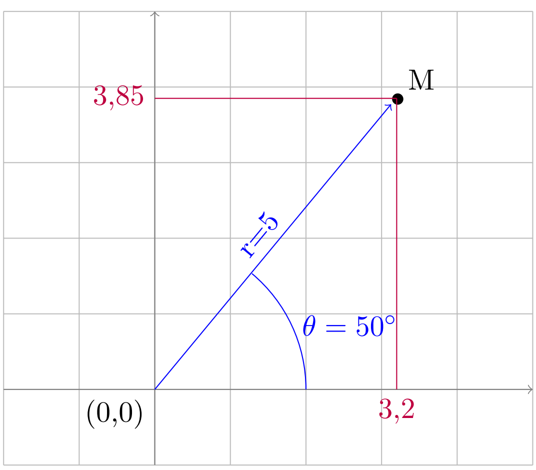
Les coordonnées cartésiennes du point M sont très simples à calculer. Dans un cercle de rayon 1, l'abscisse est le cosinus de l'angle et l'ordonnée est le sinus de l'angle : $\mathrm{M_x} = \cos(\theta)$ et $\mathrm{M_y} = \sin(\theta)$.



Avec un rayon différent de 1, les équations deviennent : $M_x = r \times \cos(\theta)$ et $M_y = r \times \sin(\theta)$. Voici les calculs pour obtenir les coordonnées cartésiennes du point M précédent, tracé avec `\draw (50:5);`.

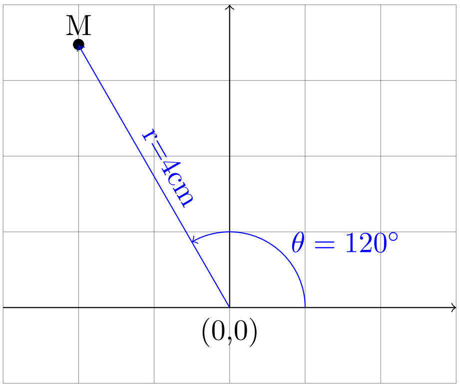
$$\begin{aligned} M_x &= r \times \cos(\theta) \\ &= 5 \times \cos(50) \\ &= 5 \times 0,64 \\ &= 3,2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} M_y &= r \times \sin(\theta) \\ &= 5 \times \sin(50) \\ &= 5 \times 0,77 \\ &= 3,85 \end{aligned}$$

Les coordonnées cartésiennes calculées du point M sont donc (3.2,3.85).



1.5 Utiliser une valeur d'angle supérieure à 90°

Pour positionner un point en coordonnées polaires, la syntaxe reste la même avec une valeur d'angle supérieure à 90°. Voici la syntaxe de cet exemple : `\draw(120:4);`. La référence est toujours l'origine (0,0), l'angle est de 120° et le rayon est de 4 cm.



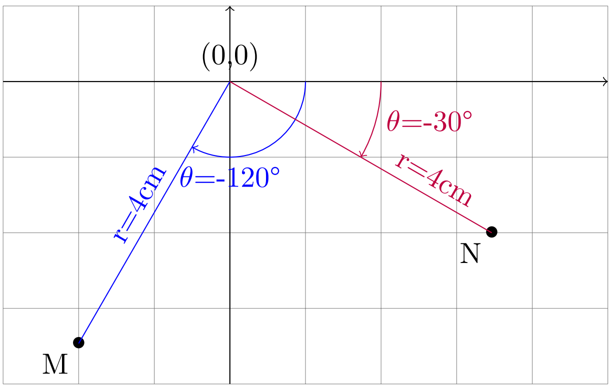
Nous pouvons calculer les coordonnées cartésiennes du point M, avec les mêmes équations que précédemment : M(-2,3.46).

1.6 Utiliser des valeurs d'angle négatives

Avec des valeurs d'angle négatives, nous allons dans le sens anti-trigonométrique, vers le bas par rapport à l'axe des abscisses.

Voici la syntaxe de ces deux exemples :

```
\draw(-120:4);% Point M
\draw(-30:4);% Point N
```



Le calcul des coordonnées cartésiennes est toujours le même : M(-2,-3.46) et N(3.46,-2).

2 Tracer des segments

2.1 Connaître la syntaxe

Nous pouvons parfaitement positionner un segment en coordonnées polaires. Voici la syntaxe à utiliser : `\draw(alpha:rA)--(beta:rB);`. Le premier point, A, fait un angle `alpha` et possède un rayon `rA`, tout ceci par rapport à l'origine (0,0). Le principe est le même pour le point B, avec l'angle `beta` et le rayon `rB`.

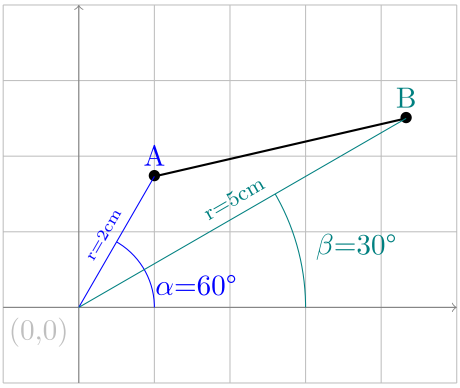
Voici le code de cet exemple :

```
\draw (60:2)--(30:5);
```

1. `(60:2)` : le premier point A fait un angle de 60° par rapport à l'origine (0,0) et possède un rayon de 2 cm, toujours par rapport à l'origine.

2. `(30:5)` : le deuxième point B fait un angle de 30° par rapport à l'origine (0,0) et possède un rayon de 5 cm, toujours par rapport à l'origine.

Voici le schéma du tracé de ce segment :



Si nous souhaitons connaître les coordonnées cartésiennes du point A, voici les calculs :

$$\begin{aligned} A_x &= r \times cos(\alpha) \\ &= 2 \times cos(60) \\ &= 2 \times 0,5 \\ &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} A_y &= r \times sin(\alpha) \\ &= 2 \times sin(60) \\ &= 2 \times 0,87 \\ &= 1,74 \end{aligned}$$

De même pour le point B :

$$\begin{aligned} B_x &= r \times cos(\alpha) \\ &= 5 \times cos(30) \\ &= 5 \times 0,87 \\ &= 4,35 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} B_y &= r \times sin(\alpha) \\ &= 5 \times sin(30) \\ &= 5 \times 0,5 \\ &= 2,5 \end{aligned}$$

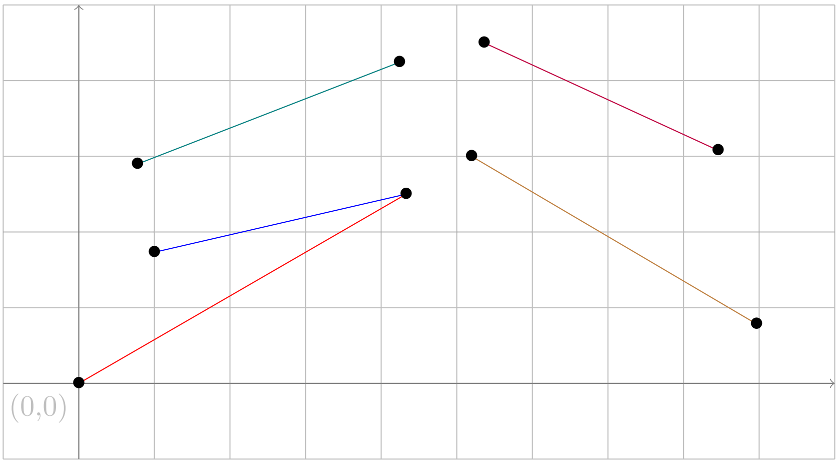
Les coordonnées calculées sont donc A(1,1.74) et B(4.35,2.5).

2.2 Tracer des segments

Voici cinq autres exemples de segment en coordonnées polaires :

```
\draw[red] (0,0)--(30:5);
\draw[blue] (60:2)--(30:5);
\draw[teal](75:3)--(45:6);
\draw[purple] (40:7)--(20:9);
\draw[brown] (30:6)--(5:9);
```

Voici l'affichage obtenu :



3 Utiliser des coordonnées relatives

3.1 Utiliser le premier point comme référence

Dans ce premier exemple, nous allons tracer des segments qui vont être positionnés en coordonnées relatives, par rapport au premier point du tracé.

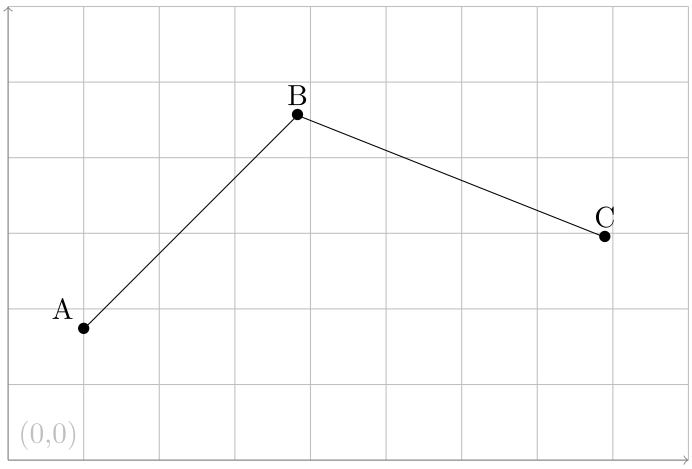
La syntaxe pour positionner un point en coordonnées polaires relatives est la même que précédemment, mais nous ajoutons le signe `+`, juste après les deux tirets, entre les coordonnées de deux points : `(aA:rA)--+(aB:rB)--+(aC:rC)`. Le positionnement du point B se fait avec par rapport au point A qui sert de référence aux mesures, il définit en quelque sorte la nouvelle origine (0,0). Et il en est de même avec le point C qui se positionne relativement au premier point, le point A.

Voici le code de l'exemple que nous allons utiliser :

```
\draw (60:2)--+(45:4)--+(10:7);
```

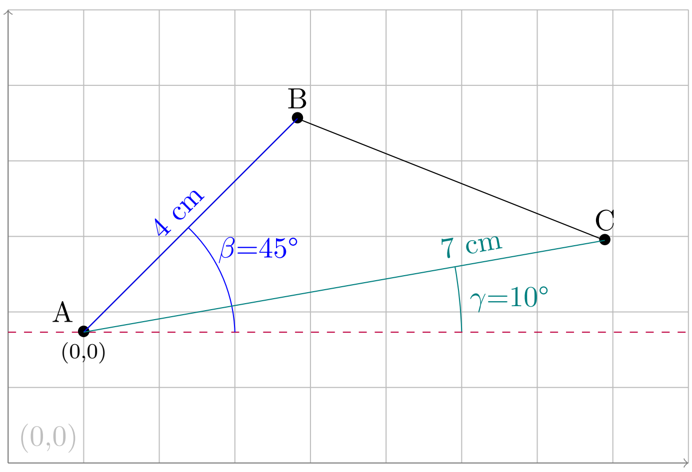
Notez bien que le premier point est en coordonnées polaires, mais il pourrait être aussi en coordonnées cartésiennes. Cela ne change pas grand-chose puisque c'est le premier point du tracé. En fin de compte, tout dépend du type de coordonnées dont vous disposez pour ce premier point.

Voici le graphique obtenu :



1. Le point A a pour coordonnées polaires `(60:2)`. Il fait un angle de 60° et possède un rayon de 2 cm. Ces deux mesures se font par rapport à l'origine (0,0) du graphique.
2. Le point B a pour coordonnées polaires `--+(45:4)`. Il fait un angle de 45° et possède un rayon de 4 cm. Ces deux mesures se font par rapport aux coordonnées du point A.
3. Le point C a pour coordonnées polaires `--+(10:7)`. Il fait un angle de 10° et possède un rayon de 7 cm. Ces deux mesures se font aussi par rapport aux coordonnées du point A.

Voici le schéma des mesures relatives utilisées par les points B et C, par rapport au point A :



3.2 Calculer les coordonnées cartésiennes des points

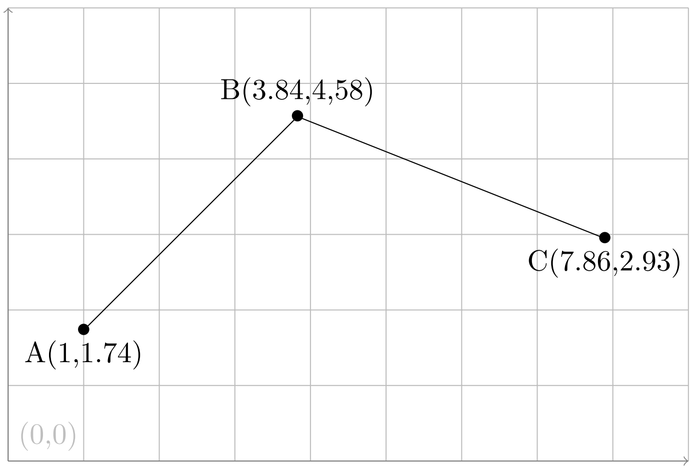
Pour calculer les coordonnées cartésiennes du point A, les équations sont toujours les mêmes :

$$\begin{aligned} A_x &= r \times \cos(\alpha) \\ &= 2 \times \cos(60) \\ &= 2 \times 0,5 \\ &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} A_y &= r \times \sin(\alpha) \\ &= 2 \times \sin(60) \\ &= 2 \times 0,87 \\ &= 1,74 \end{aligned}$$

Par contre, pour les points B et C, il faut ajouter les valeurs des coordonnées du point A, puisque ces points sont positionnés relativement par rapport à A :

$$\begin{aligned} B_x &= A_x + r \times \cos(\beta) \\ &= 1 + (4 \times \cos(45)) \\ &= 1 + (4 \times 0,71) \\ &= 1 + 2,84 \\ &= 3,84 \\ C_x &= A_x + r \times \cos(\beta) \\ &= 1 + (7 \times \cos(10)) \\ &= 1 + (7 \times 0,98) \\ &= 1 + 6,86 \\ &= 7,86 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} B_y &= A_y + r \times \sin(\beta) \\ &= 1,74 + (4 \times \sin(45)) \\ &= 1,74 + (4 \times 0,71) \\ &= 1,74 + 2,84 \\ &= 4,58 \\ C_y &= A_y + r \times \sin(\beta) \\ &= 1,74 + (7 \times \sin(10)) \\ &= 1,74 + (7 \times 0,17) \\ &= 1,74 + 1,19 \\ &= 2,93 \end{aligned}$$

Voici les coordonnées cartésiennes calculées pour les trois points : A(1,1.74), B(3.84,4,58) et C(7.86,2.93) et voici leur affichage sur le graphique.



3.3 Utiliser le point précédent comme référence

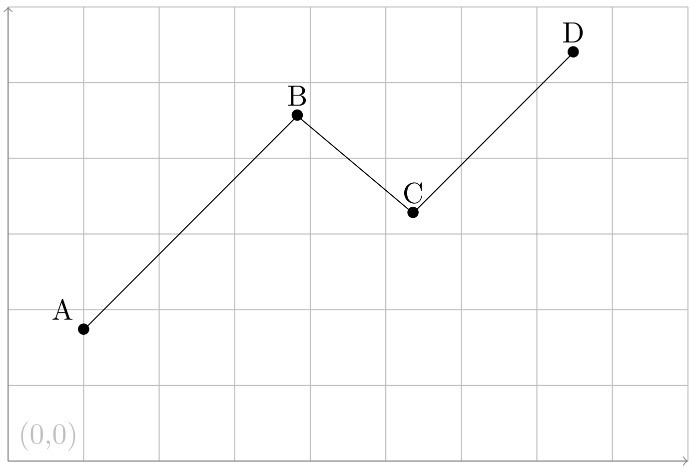
Dans ce deuxième exemple, nous allons tracer des segments qui vont être positionnés en coordonnées relatives, par rapport au point précédent. Le point B est positionné par rapport au point A, le point C est positionné par rapport au point C, le point D est positionné par rapport au point C, etc...

La syntaxe est très similaire à la précédente, mais nous ajoutons cette fois deux signes `+`, juste après les deux tirets, entre les coordonnées de deux points : `(aA:rA)--++(aB:rB)--++(aC:rC)--++(aD:rD)`.

Voici le code de cet exemple :

```
\draw (60:2)--++(45:4)--++(-40:2)--++(45:3);
```

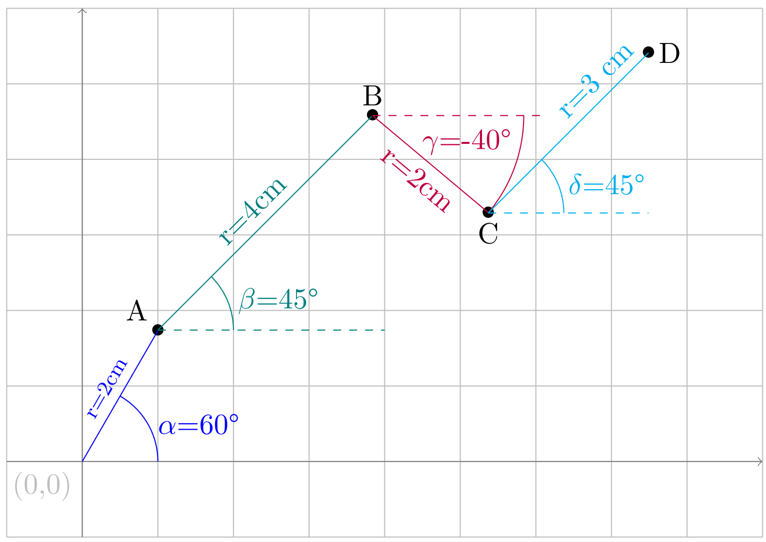
Et voici le graphique obtenu :



Voici comment se positionnent les points de cette figure :

1. `(60:2)` : le premier point A utilise un angle de 60° et un rayon de 2 cm par rapport à l'origine (0,0).
2. `(45:4)` : le deuxième point B utilise un angle de 45° et un rayon de 4 cm par rapport au point A
3. `(-40:2)` : le troisième point C utilise un angle de $-40°$ et un rayon de 2 cm par rapport au point B.
4. `(45:3)` : le quatrième point D utilise un angle de 45° et un rayon de 3 cm par rapport au point C

Voici le graphique des mesures utilisées par les points A, B, C et D :

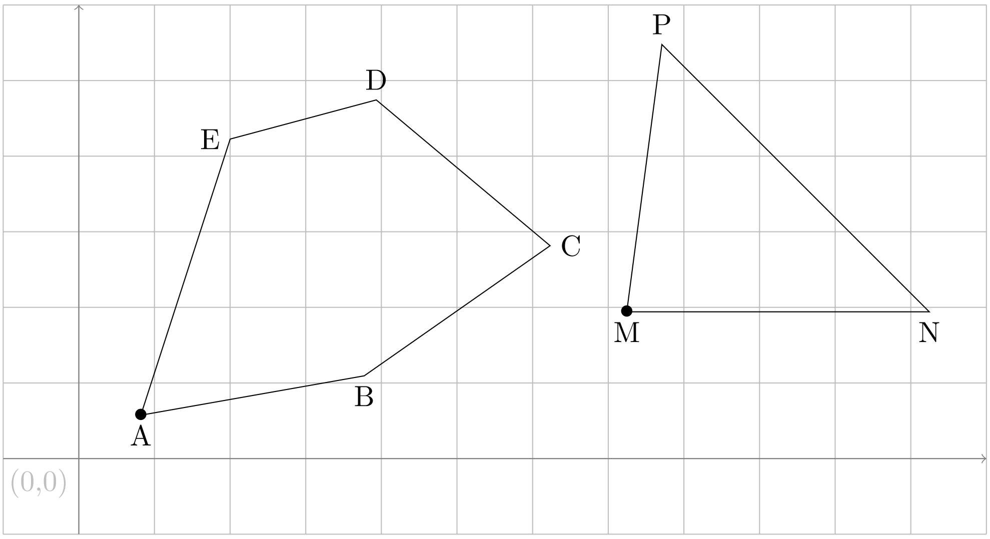


4 Tracer d'autres figures

4.1 Tracer un polygone et un triangle

Dans les exemples précédents, nous n'avons tracé que des segments, mais vous pouvez tracer d'autres figures fermées avec des coordonnées polaires : des polygones, des triangles…

Dans ce graphique, les deux puces noires indiquent le premier point du tracé des figures, en coordonnées polaires.



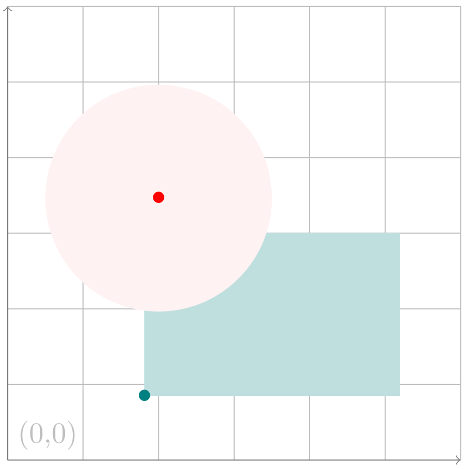
Voici le code de ces deux exemples :

```
\draw(35:1)node[below]{A}--++(10:3)node[below]{B}--++(35:3)node[right]{C}
        --++(140:3)node[above]{D}--++(15:-2)node[left]{E}--cycle;% Un polygone
\draw(15:7.5)node[below]{M}--++(0:4)node[below]{N}--++(135:5)node[above]{P}
        --cycle;% Un triangle
```

4.2 Tracer des figures prédéfinies

Vous pouvez parfaitement positionner des figures prédéfinies en coordonnées polaires, comme des rectangles ou des cercles.

Dans ce graphique, la puce de couleur indique le premier point du tracé des figures, en coordonnées polaires.

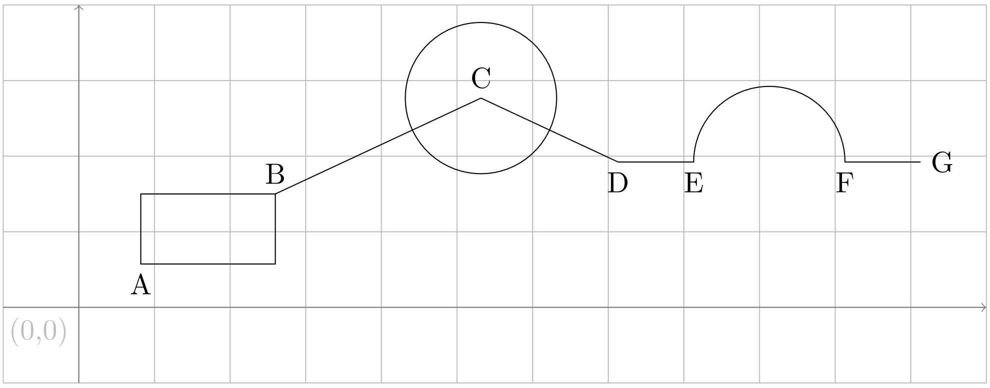


Voici le code de ces deux exemples :

```
\fill[teal!25](25:2)rectangle(30:6);% Un rectangle
\fill[red!5](60:4)circle(1.5);% Un cercle
```

4.3 Tracer des figures sur un chemin

Voici un exemple avec un rectangle, des segments, un cercle et un arc de cercle, tous positionnés sur un chemin de coordonnées. Chaque figure est positionnée en coordonnées polaires relatives par rapport au point précédent.



Voici le code de cet exemple :

```
\draw(35:1)node[below]{A}rectangle(30:3)node[above]{B}--++(25:3)node[above]{C}circle(1)
        --++(-25:2)node[below]{D}--++(0:1)node[below]{E}arc(0:-180:-1)node[below]{F}
        --++(0:1)node[right]{G};
```